

乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第2報）

—初期乱れ圧力および速度解析の信頼性向上—

On the Analytical Solution for the Vortex Structured Pressure
of Turbulent Boundary Layer (Part 2)— Confidential Availability of the Estimation of Turbulent Fluctuating
Velocity Distribution —田中 厚成¹⁾・岡本 恒²⁾・山木 さやか³⁾

Atsushige TANAKA, Hisashi OKAMOTO and Sayaka YAMAKI

本研究は乱流境界層内の渦構造圧力と乱れ速度分布を解析的に求めることを目的としている。第1報においては、流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式とそれに伴う圧力に関するポアソン方程式の漸近解を関数解析を用いて数式で求めている。この解析の特徴は、流速および圧力が流れ方向にあるいはそれに垂直な横方向に対し周期境界条件を付加することにより、流れ全体にある種の安定条件が付与され、安定な流れおよび圧力を示す数式が求まることである。関数解析を用いて解析解を求める過程で演算子の非線形関数問題を演算子の線形関数の級数展開で与える問題に代えて実施し、本研究の解析解を漸近解で与えている。第1報で開発した解析方法の有効性を、第2報で具体的な検討をした。また、これまで特別な場合を除き解が見つからないといわれる3次元ポアソン方程式の解を、3次元ラプラス変換により実用的な解を求めている。これは、第1報の2次元ラプラス-1次元フーリエ変換による近似解を根本的に改良している。更に、計算精度の向上に寄与する解法の開発、改善を行っている。本研究で用いた関数解析では実関数から複素関数へ変換される過程があり、非常に予測が困難な乱れた速度や乱れた圧力が解析の中で現れてくる。これにより乱れ速度分布がどのように構成されるかを示す可能性を有している。また、解の一意性を確保するため、解析で用いる関数は特殊な場合を除き全て指数関数に置き換える方法を検討し実用可能な精度が得られた。これは今後乱流現象そのものを検討する上で有用と期待される。

連絡先：田中厚成 atstanaka@cis.ac.jp

1) 千葉科学大学危機管理学部動物環境システム学科

Department of Animal and Environmental System, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science

2) 千葉科学大学危機管理学部医療危機管理学科(非常勤講師)

Department of Medical Crisis Management, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science

3) 千葉科学大学危機管理学部防災システム学科(4年)

Department of Disaster System Science, Faculty of Risk and Crises Management, Chiba Institute of Science

(2010年11月11日受付, 2010年12月16日受理)

1. 緒言

流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式とそれに伴う圧力に関するポアソン方程式を線形項と非線形項に分離して表わし、非線形項を外力項と扱い局所的に線形として扱う連立線形偏微分方程式を解く。次に線形項の値を用い外力項を更新し、再度連立線形偏微分方程式を解く。以下、この処理を繰り返す行い、漸近解を求める方式を開発し、有効性を検証することを本研究の目的としている。本研究の対象は、乱流境界層流れとする。近年、数値シミュレーションにより乱流境界層流れを対象とした、流体現象のダイナミック・シミュレーションにより新しい展望が拓けてきている。これを理解し、数式で導き、数値シミュレーションで得られた現象と等価な現象を導く。そし

て次に、この現象の物理的要因を求めることにより本研究の有効性が示されるものと考えている。

用いる方法は多次元ラプラス変換を主にした解析法である。流体および圧力の支配方程式を上記のように漸近的に解く場合には線形偏微分方程式を解析的に解く必要がでてくる。しかし、この場合には、3次元以上の線形偏微分方程式に対しては、特別な場合を除き解が得られないことが知られている。⁴⁾ 本研究では数値シミュレーション、風洞/水槽実験等で用いられている周期境界条件を用いること、および見つからぬ厳密な関数解析解の代わりに実用的な近似解を用いることにより、解を見だし、これを用いて展開している。

第1報で、上記関数解析において数値シミュレーションで求められたのと等価な渦構造圧力の形態、分布を安定して求めることができた。本報では第1報の手法がやや定性的な面を改良し、より定量的に満足される解析解を出すため、下記の開発および改善を試みる。

(1) 局所線形化したナビエ・ストークス方程式と圧力のポアソン方程式の多次元連立偏微分方程式の収束解

第1報において、外力項を一定として、それぞれ局所線形化したナビエ・ストークス方程式とポアソン方程式の解法を独立に求めている。次にこれを連立して求める方式を明確にする必要があるため、多次元傾斜法の整理を行う。

(2) 周期境界条件の有効性

本解析法が有効に扱える理由として、周期境界条件を用いると、以前より一般に解けないと扱われていた局所線形化したナビエ・ストークス方程式とポアソン方程式が解け、1次元少ない次元の問題に変形される。これは数式では既に第1報で述べられているが、それにより式がどのように変化しているのか明確ではない。

ここでは風洞、水槽の側壁で圧力や流れがもう一方の側壁の値を取ることでそれらのフィード・バックループに相当する作用が働き解が安定化し、且つ通常の計測や解析で良く用いられている手法であることを示す。

(3) 3次元ラプラス変換の利用

第1報において、線形化した偏微分方程式を解く際、数学公式集には2D逆ラプラス-1D逆フーリエ変換では解があり、3D逆ラプラス変換では解が得ることができなかった。このため、前者を用い、第1報では主流方向の流れは無限後方から来て無限前方へ流れていく流れを対象として扱い、解を得ている。これは一般の流れには不適のため、解析途中で出てくる関数を近似関数に置き替えて、実用に耐える3D逆ラプラス変換の近似解を求める。

(4) 階層構造の構成と表示方法

流れおよび圧力現象はその現象を代表するスケールを選び、そのスケールの相違により階層を分離すると現象の説明がより明確になる。第1報では、これらの現象を3階層

に分けている。一般的な平均流速、平均圧力から構成される階層と、近年発展の著しい渦構造圧力や乱れ速度に関する階層、および極めて狭い領域で急激に変化をしていると予想される渦構造圧力よりさらに小さい代表スケールを持つ現象を扱う階層の3階層である。第1報では解析解と数値シミュレーション解ではほぼ同じような渦構造圧力が求まることを主にしているため、小さい代表スケールを持つ階層については、明確には与えられていない。その要因として、参考とした数値シミュレーションでは2階層しかなく、且つ、解析で用いる階層分けは数式の級数展開を主にしており、級数が必ずしも階層分けと対応するとは限らないためである。特に本解析では級数の中に外力関数を複素関数に変換し、実関数へ戻す過程が入り、実関数の表示の仕方により大幅な解が相違することが予想される。そのため着目している領域の現象の関数表示方法を一定にする必要がある。そこで第2報では指数関数で有限区間のフーリエ級数展開近似する方法を採用し、有限区間の級数展開および複素変換において一意性が取れる方式の選択を検討する。

(5) 流体現象のダイナミック・シミュレーション

スーパーコンピュータによる大規模な直接数値計算DNS(Direct Numerical Simulation)により流体現象のダイナミック・シミュレーションが本格的に行われ著しい発展を遂げている。それにより乱流境界層に関しては、流体の代表的な現象をいくつかの「構成要素(structure element)」と、「運動(emotion)」により、乱流境界層のダイナミクスを可視化技術を利用して提示されている²⁾

これは単に現象を具体的に解明しているばかりでなく、流体に関するナビエ・ストークス方程式の解法を数式ではなく数値を用いて示していると考えられる。したがって、本研究がこれまで実施している解析の目標および過程を明確にする上で、このダイナミック・シミュレーション結果が特に重要となる。第1報では十分発達した乱流境界層内の渦構造圧力の解析解が、ダイナミック・シミュレーション結果とほぼ同じに成りうることを示している。第2報では本解析解の位置付け、および今後の目標を明確にするため、乱流境界層の解明すべき具体的な現象の全体図が必要となる。しかし参考文献2では各種現象の説明図は与えられているが、全体図は表示されていない。そこで、この文献の各種現象の説明図を纏めて、本研究の指針図を作成する。

2. 流れおよび圧力に関する方程式の収束解

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-1)$$

ここで、

$$\tilde{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}, \nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \nabla' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla' \nabla$$

流れ方向を x 、上下方向を y 、横方向を z とし、 x, y, z 方向の速度をそれぞれ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ とし、圧力を \tilde{p} 、時間を t 、レイノルズ数を Re で表わす。(2-1)式において本解析の対象としている乱流境界層の場合、粘性の影響が支配的であると考えられ、本解析では(2-1)式を次のように表わす。

$$\left(\nabla^2 - Re \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{\mathbf{u}} = Re \tilde{\mathbf{f}} \quad (2-2)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} \equiv \nabla \tilde{p} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-3)$$

同様に圧力に関する方程式は(2-1)式を更に偏微分し、質量保存則 $\nabla' \tilde{\mathbf{u}} = 0$ を用いることにより次式で与えられる。

$$\nabla^2 \tilde{p} = \tilde{g} \quad (2-4)$$

$$\tilde{g} \equiv -\nabla' \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} \right\} \quad (2-5)$$

速度に関しては速度ベクトルの初期値 $\tilde{\mathbf{u}}_0$ を与え、外力 $\tilde{\mathbf{f}}$ の初期値 $\tilde{\mathbf{f}}_0$ を(2-3)式で求める。この $\tilde{\mathbf{f}}_0$ を用いて(2-2)式で速度ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}$ を求め、以下これを繰り返すことにより(2-2),(2-3)式を満足する速度ベクトルの収束解を求める。圧力に関する(2-4),(2-5)式も同様である。

ここで問題となるのは速度ベクトルの方程式の外力 $\tilde{\mathbf{f}}$ を定める(2-3)式の中に(2-4)式で定まる圧力 \tilde{p} が含まれ、同様に圧力の方程式の外力 \tilde{g} を求める(2-5)式に(2-2)式で求まる速度ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}$ が含まれている。(2-2),(2-3),(2-4),(2-5)式を纏めると、 $\tilde{\mathbf{u}}$ と \tilde{p} が同時に満足すべき式は次式で表わされる。ここで

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 - Re \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} \\ -\nabla' \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} \right\} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

(2-6)式は $\tilde{\mathbf{u}}$ と \tilde{p} の4次元変数の収束解を求める式となる。これを繰り返し計算し収束させる必要があり、第2報で採用している方式は以下のものである。

(2-6)式を単純化して3次元の関数 \mathbf{f} と1次元の関数

f を用いて次式のように表わす。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \\ f(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

第2報以降で採用する(2-7)式の解法を、単純化した次の2次元方程式で説明を行う。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \\ f_2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

(2-8)式を図示すると、図2-1のように表わすことができる。図2-1において、 $f_1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ は曲線 A_1B_1 を、 $f_2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ は曲線 A_2B_2 を与える。ここで2つの曲線 A_1B_1 と曲線

A_2B_2 が共通の交点を持つかは明らかでない。そこで本研究では図2-2に示す漸近的に収束する方式を採用する。図

2-2の点 A_{1n} と A_{2n} はそれぞれ1次元の収束過程で得られる点を示し、これらの点を用いて(2-8)式の点 $(f_{1(n+1)}, f_{2(n+2)})$ を図2-3のように線分 $\overline{A_{1n}A_{2n}}$ 上で与える。

次に点 $(f_{1(n+1)}, f_{2(n+1)})$ を用い、図2-3に示すように $A_{1(n+1)}, A_{2(n+1)}$ を求め、逐次これを繰り返していくことに

より曲線 A_1B_1 および曲線 A_2B_2 の交点を求める方式を採用する。この逐次収束方式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_{1(n+1)} &= f_{1n} + \frac{(f_{1nc} - f_{1n})(f_{2nc} - f_{2n})^2}{(f_{1nc} - f_{1n})^2 + (f_{2nc} - f_{2n})^2} \\ f_{2(n+1)} &= f_{2n} + \frac{(f_{1nc} - f_{1n})^2 (f_{2nc} - f_{2n})}{(f_{1nc} - f_{1n})^2 + (f_{2nc} - f_{2n})^2} \end{aligned} \quad (2-9)$$

ここで、点 $(f_{1nc}, f_{2n}), (f_{1n}, f_{2nc})$ はそれぞれ図2-3の A_{1n}, A_{2n} の座標に相当する。

この収束方式は式を求める(2-7)式の解を求める4次元の収束過程にも容易に拡張できる。したがって、本研究でこれまでに行っている圧力に関する収束解および速度に関する収束解を別々に行ってから両方を満足する収束解を得て、これを繰り返すことにより最終的な収束解を得ることができる。但し、今回は収束の第1段階として別々に求めている。

3. 周期境界条件の導入と意義

流れが静止している空気中や水中を物体が走行する場合

を考える。これを相対的に物体が止まっていて、周りの流体が流れていると考えると、物体の両側の横方向に十分離れた2点の圧力、速度は同じと見なすことができる。そこで2点間の距離が物体に比べて十分長い場合には、解析上周期境界条件が満足されていると考えても差し支えない。これは物体が楕円体のような形状でなく無限に大きな幅を持つ水平な平板の場合においても、平板周りの横方向の流れは、横方向には変化が少ないと考えられるため、同様に周期境界条件が成り立つと考えられる。

ここでは第1報で導入した周期境界条件の数式表示を用いて、その意義をシステム線図を用いて検討を行なう。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{p} = \tilde{g} \quad (3-1)$$

この式を横方向の垂直面の位置を $z=0$ 、もう一方の対となる垂直面の位置を $z=l$ とし、(3-1)式をラプラス演算子 u, v, w を用いてラプラス変換すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2 + w^2) \tilde{p} \\ = \tilde{G} + u(\tilde{p}|_{x=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \Big|_{x=0} + v(\tilde{p}|_{y=0}) \\ + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \Big|_{y=0} + w(\tilde{p}|_{z=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ = \tilde{G}_s + w(\tilde{p}|_{z=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (3-2)$$

ここで L をラプラス変換を表わすとし

$$\tilde{G} \equiv \underset{x}{L} \underset{y}{L} \underset{z}{L} \{ \tilde{g} \}$$

$$\tilde{G}_s \equiv \underset{x}{L} \underset{y}{L} \underset{z}{L} \left\{ \tilde{g} + u(\tilde{p}|_{x=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \Big|_{x=0} + v(\tilde{p}|_{y=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \Big|_{y=0} \right\}$$

で与えている。

(3-2)式は次式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \\ = \left(\frac{1}{w^2 + u^2 + v^2} \frac{w}{w^2 + u^2 + v^2} \right) \tilde{G}_s \\ + \left(\frac{w}{w^2 + u^2 + v^2} \frac{1}{w^2 + u^2 + v^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (3-3)$$

簡単化して \tilde{p}, \tilde{G}_s の記号をそれぞれ $\underset{x}{L} \underset{y}{L} \{ \tilde{p} \}, \underset{x}{L} \underset{y}{L} \{ \tilde{g}_z \}$

の時も用いるとすると、(2-3)を w に関して逆ラプラス変換すると次のように表わすことができる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) = \int_0^z \mathbf{a}(z-\zeta) \tilde{G}_s(\zeta) d\zeta + \mathbf{A}(z) \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=0} \quad (3-4)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(z-\zeta) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \sqrt{u^2+v^2}(z-\zeta) \\ \cos \sqrt{u^2+v^2}(z-\zeta) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} &\equiv \begin{pmatrix} \cos \sqrt{u^2+v^2} z & \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \sqrt{u^2+v^2} z \\ -\sqrt{u^2+v^2} \sin \sqrt{u^2+v^2} z & \cos \sqrt{u^2+v^2} z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-5)$$

周期境界条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=l} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=0} \quad (3-6)$$

の関係より、(3-4)式は次のように書き表わされる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}(l)) \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=0} = \int_0^l \mathbf{a}(l-\zeta) \tilde{G}_s(\zeta) d\zeta$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=0} = \int_0^l (\mathbf{I} - \mathbf{A}(l))^{-1} \mathbf{a}(l-\zeta) \tilde{G}_s(\zeta) d\zeta \quad (3-7)$$

(3-4), (3-7)式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \right) \\ = \int_0^z \mathbf{a}(z-\zeta) \tilde{G}_s(\zeta) d\zeta \\ + \int_0^l \mathbf{A}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{A}(l))^{-1} \mathbf{a}(l-\zeta) \tilde{G}_s(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (3-8)$$

ここで便宜的に $\omega \equiv \sqrt{u^2+v^2}$ と置き、次の関係式

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A}(l))^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega l & -\frac{1}{\omega} \sin \omega l \\ \omega \sin \omega l & 1 - \cos \omega l \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega l}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega l}{2} & \frac{1}{\omega} \cos \frac{\omega l}{2} \\ -\omega \cos \frac{\omega l}{2} & \sin \frac{\omega l}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{A}(l))^{-1} \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \ell}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega z & \frac{1}{\omega} \sin \omega z \\ -\omega \sin \omega z & \cos \omega z \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega \ell}{2} & \frac{1}{\omega} \cos \frac{\omega \ell}{2} \\ -\omega \cos \frac{\omega \ell}{2} & \sin \frac{\omega \ell}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sin \omega(\ell - \zeta) \\ \cos \omega(\ell - \zeta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \ell}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \omega \left(z - \frac{\ell}{2} \right) & \frac{1}{\omega} \cos \omega \left(z - \frac{\ell}{2} \right) \\ -\omega \cos \omega \left(z - \frac{\ell}{2} \right) & -\sin \omega \left(z - \frac{\ell}{2} \right) \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sin(\ell - \zeta) \\ \cos \omega(\ell - \zeta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \ell}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \cos \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) \\ -\sin \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) \end{pmatrix} \\
 &= 2 \sin \frac{\omega \ell}{2} a(z - \zeta) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \ell}{2} \sin \omega(z - \zeta) \\ 2 \sin \frac{\omega \ell}{2} \cos \omega(z - \zeta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \cos \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) + \frac{1}{\omega} \cos \omega \left(\frac{\ell}{2} - z + \zeta \right) \\ \sin \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) + \sin \omega \left(\frac{\ell}{2} - z + \zeta \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

以上の関係式より(3-8)式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{P} \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^z \frac{1}{2 \omega \sin \frac{\omega \ell}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega \left(\frac{\ell}{2} - z + \zeta \right) \\ \omega \sin \omega \left(\frac{\ell}{2} - z + \zeta \right) \end{pmatrix} \tilde{G}_s d\zeta \\
 &\quad + \int_z^\ell \frac{1}{2 \omega \sin \frac{\omega \ell}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) \\ -\omega \sin \omega \left(\frac{\ell}{2} + z - \zeta \right) \end{pmatrix} \tilde{G}_s d\zeta
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

(3-4)式、(3-8)式をブロック線図で表わすと図 3-1 のように与えることができる。図 3-1 において、圧力の入口境界と出口境界とを等しく置くことにより、ブロック線図においてフィードバックに相当する機能が与えられる。これにより、ポアソン方程式で解が求まらなくなる要因でも

ある(3-4)式の $\sqrt{u^2 + v^2}$ が特異点にならない問題を解消

している。図 3-1 において、周期境界条件 $\tilde{b}(0) = \tilde{b}(\ell)$ だけを扱っているが、実現象においては、別の種々の等価条件があると考えられる。

4. 3次元逆ラプラス変換の利用

本解析では z 方向に周期境界条件を付与し、安定化した次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 &\tilde{p}(u, v, z) \\
 &= \int_0^\ell \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{1}{u^2 + v^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{\ell} (z - \zeta)}{u^2 + v^2 - \left(\frac{2k\pi}{\ell} \right)^2} \right\} \\
 &\quad \times \tilde{G}_s(u, v, \zeta) d\zeta
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

ここで $\tilde{p}(u, v, z)$ を

$$\begin{aligned}
 &\tilde{P}(u, v, z) \equiv \tilde{P}_{A1}(u, v, z) + \tilde{P}_{B1}(u, v, z) \\
 &\tilde{P}_{A1}(u, v, z) \equiv \int_0^\ell \frac{1}{\ell} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2} G_s(u, v, \zeta) d\zeta \\
 &\tilde{P}_{B1}(u, v, z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\ell \frac{2}{\ell} \tilde{P}_{\beta_k}(u, v, \zeta) \cos \beta_k(z - \zeta) d\zeta \\
 &\tilde{P}_{\beta_k} \equiv \frac{G_s(u, v, \zeta)}{u^2 + v^2 - \beta_k^2}, \quad \beta_k \equiv \frac{2k\pi}{\ell}; k=1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

とおく。(4-2)式の $\tilde{P}(u, v, z)$ には発散する解としない解があり、発散しない解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 &\tilde{P}_{\beta_k}(u, v, \zeta) \\
 &= \frac{\tilde{G}_s(u, v, \zeta) - \tilde{G}_s\left(u, \sqrt{\beta_k^2 - u^2}, \zeta\right)}{v^2 - \left(\sqrt{\beta_k^2 - u^2}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{4-3}$$

(4-3)式より

$$\begin{aligned}
 &\tilde{P}_{\beta_k}(u, v, \zeta) \\
 &= \mathbf{L}_x^{-1} \mathbf{L}_y^{-1} \left\{ \frac{\tilde{G}_s(u, v, \zeta) - \tilde{G}_s\left(u, \sqrt{\beta_k^2 - u^2}, \zeta\right)}{v^2 - \left(\sqrt{\beta_k^2 - u^2}\right)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}(\xi, \eta, \zeta) \{H(x - \xi, y + \eta) - H(x - \xi, |y - \eta|)\} d\xi d\eta$$

(4-4)

ここで

$$H(x, y, \beta_k) = \begin{cases} L_x^{-1} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\beta_k^2 - u^2}} e^{-y\sqrt{\beta_k^2 - u^2}} \right\} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \quad (4-5)$$

第1報においては(4-5)式の逆ラプラス変換解が見つからず、 $\omega^2 = -u^2$ とおきかえ、逆フーリエ変換を用いて次式の $H(x, y, \beta_k)$ を求めている。

$$H(x, y, \beta_k) \Big|_{part1} = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\beta_k \sqrt{u^2 + v^2} \right) \quad (4-6)$$

ここで K_0 は0次の第2種変形ベッセル関数。

逆フーリエ変換は、逆ラプラス変換と比べ、安定性の考慮の仕方と初期条件の入れ方が異なるため、第2報では元に戻して逆ラプラス変換で上記 H 関数を求める。

(4-5)式で与えられる逆ラプラス変換は次式の積分で与えられる。

$$H(x, y, \beta_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k + \varepsilon - i\infty}^{\beta_k + \varepsilon + i\infty} \frac{1}{2\sqrt{\beta_k^2 - u^2}} e^{-y\sqrt{\beta_k^2 - u^2}} du \quad (4-7)$$

ここで、 ε は $0 < \varepsilon \ll 1$ を満足する定数である。(4-7)式の積分路を図4-1のB' Bで示す。尚、参考までに第1報で求めた逆フーリエ変換で用いた積分路は図中A' Aで与えられる。(4-7)式で $u = \beta_k + \varepsilon + i\xi$ とおくと次式のような近似式が得られる。

$$H(x, y, \beta_k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2h(\xi)} e^{ux - h(\xi)y} h(\xi) \equiv \sqrt{\xi^2 - 2(\beta_k + \varepsilon)i\xi - 2\beta_k\varepsilon} \quad (4-8)$$

(4-8)式を解くため、上記 $h(\xi)$ 関数を次のように実部 $\varphi(\xi)$ と虚部 $i\psi(\xi)$ に分け、

$$h(\xi) = \varphi(\xi) + i\psi(\xi) \quad (4-9)$$

で表わし、 $\varphi(\xi)$ および図4-2に与える。

(4-8)、(4-9)式より、

$$H(x, y, \beta_k) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varphi + i\psi} e^{\beta_k x + i\xi x - (\varphi + i\psi)y} d\xi \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\varphi + i\psi} e^{\beta_k x + i\xi x - (\varphi + i\psi)y} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi - i\psi} e^{\beta_k x - i\xi x - \varphi y + i\psi y} \right\} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} e^{\beta_k x - \varphi y} \{ \varphi \cos(x\xi - y\psi) + \psi \sin(x\xi - y\psi) \} d\xi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \beta_k^2}} e^{\beta_k x} \cos \beta_k y \cdot e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta_k^2}} \cos x\xi d\xi \quad (4-10)$$

ここで積分公式

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \beta^2}} e^{-\gamma\sqrt{\xi^2 + \beta^2}} \cos \alpha \xi d\xi = K_0 \left(\beta \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \right) \quad (4-11)$$

を用いると、(4-10)式は次式で与えられる。

$$H(x, y, \beta_k) \equiv \frac{1}{2\pi} e^{\beta_k x} \cos \beta_k y \cdot K_0 \left(\beta_k \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (4-12)$$

第1報で逆フーリエ変換により求めた関数(4-6)式を用いると(4-12)式は次のように書くことができる。

$$H(x, y, \beta_k) \equiv e^{\beta_k x} \cos \beta_k y \cdot H(x, y, \beta_k) \Big|_{part1} \quad (4-13)$$

したがって、第2報の H 関数は第1報の H 関数と $e^{\beta_k x} \cos \beta_k y$ との積で与えられており、第1報と傾向は変わらないと考えられる。

(4-12)式を用い、 z 方向に周期境界条件を持つ圧力 \tilde{p}_1 は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(x, y, z) &= \frac{1}{2\ell} \int_0^{\ell} \int_0^x \int_0^z \{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta) \} d\phi d\xi d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{g} \left\{ K_0 \left(\beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right) \cos \beta_k (y+\eta) \right. \\ &\quad \left. - K_0 \left(\beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \cos \beta_k (y-\eta) \right\} e^{\beta_k (x-\xi)} \\ &\quad \times \cos \beta_k (z-\zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (4-14)$$

x 方向に周期境界条件を持つ圧力 \tilde{p}_2 は、周期幅 L_x とし、角周波数 $\beta_{xk} \equiv 2k\pi/L_x$ で与えると、(4-14)式と同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & \tilde{P}_2(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{2L_x} \int_0^{L_x} \int_0^x \int_0^\xi \{ \tilde{g}(\xi, y + i\phi, \zeta - \phi) + \tilde{g}(\xi, y - i\phi, \zeta - \phi) \} d\phi d\xi d\zeta \\
 &+ \frac{1}{2\pi L_x} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{L_x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{g} \left\{ K_0 \left(\beta_{xk} \sqrt{(z-\zeta)^2 + (y+\eta)^2} \right) \right. \\
 &\quad \times \cos \beta_{xk} (y+\eta) - K_0 \left(\beta_{xk} \sqrt{(z-\zeta)^2 + (y-\eta)^2} \right) \\
 &\quad \left. \times \cos \beta_{xk} (y-\eta) \right\} e^{\beta_{xk}(z-\zeta)} \cos \beta_{xk} (x-\xi) d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

(4-14), (4-15)式で与えられる圧力 \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 の第1項は外力

関数 $\tilde{g}(x, y, z)$ の y を複素変換した $\tilde{g}(x, y \pm i\phi, z)$ の形が含まれている。仮に \tilde{g} が y の三角関数で与えられる場合は \tilde{g} は発散し、 y の指数関数で与えられる場合は \tilde{g} は y の規則波で与えられる。したがって(4-14), (4-15)式の第1項に対応する圧力が実際の現象を表わしていると考えたと外力関数を構成している速度の y 関数表示が重要となる。

(4-14), (4-15)式の \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 の第2項以下の項は急激な立上り特性を持つ第2種変形ベッセル関数がデルタ関数のような役割を受け持ち、外力 \tilde{g} の影響により3次元的に拡散していく乱れ圧力を級数で表わしていると推定される。

5. 階層構造の構成と表示方法

乱流境界層内に含まれる現象を、その現象を表わす代表長さの大きさにより分類し、現象をいくつかの階層に分ける。そして、その階層内、階層間に存在する構成要素と動きを調べることで、乱流渦境界層内に含まれる圧力および速度に関するダイナミクスを求めることを検討する。

この方法は複雑多岐に亘る乱流境界層内の現象を、定量的な渦構造圧力、レイノルズ応力等と動作を示す流れの巻き上がり、急降下等で表現する方式がDNSによるシミュレーションを用いて提案²⁾されてきているので、第2報においてもこの方式を用いる。

本解析では、第1報と同じく階層を3段階に分ける。3階層の内訳を単純化し、表5-1に与える。

表5-1より本解析の手法は次のような特徴を有している。

(1)階層に含まれる圧力、外力は、表5-1の欄の上下あるいは左右の関係から求める方程式を採用している。したがって定量的なデータがそろっている \tilde{g}_1 と定性的データが

DNS解析により十分検討されている \tilde{p}_{II} を基に、表5-1の全欄を明確にすることは可能である。

(2) 階層 \tilde{p}_{II} では DNS 解析結果より多数の渦構造圧力の楕円体形状の半径、長軸方向、長軸長さ、位置を求めることができる。また、内部圧力分布をガウス分布と近似し、逆に、階層 \tilde{g}_{II} に属すその外力形状を求める。そしてほぼ同じ壁面からの高さを中心に有する数個の外力が重ね合わせ、階層 \tilde{g}_I の対応する壁面高さの既知の外力にピーク値、形状が一致する。このことにより、逆に、階層 \tilde{g}_{II} に属す

その外力および階層 \tilde{p}_{II} に属す渦構造圧力の内部圧力分布

も求めることができる。この方法により、第1報において複雑な渦構造圧力分布が単純化して再現可能であることを示している。参考までに、積分表示式と概略形状の関係を図5-1に与える。

(3) z 方向に周期境界条件を持つ圧力 \tilde{p}_1 と階層との関係(4-14)式を次のように書き直す；

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_1(x, y, z) &= \tilde{p}_{1A}(x, y, z) + \tilde{p}_{1B}(x, y, z) \\
 \tilde{p}_{1A} &= \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \int_0^x \int_0^\xi \{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta) \} d\phi d\xi d\zeta \\
 \tilde{p}_{1B} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\ell \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{g}}{2\pi\ell} \left\{ K_0 \left(\beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right) \cos \beta_k (y+\eta) \right. \\
 &\quad \left. - K_0 \left(\beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \cos \beta_k (y-\eta) \right\} e^{\beta_k(x-\xi)} \\
 &\quad \times \cos \beta_k (z-\zeta) d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

ここで、 $\tilde{p}_{1A}, \tilde{p}_{1B}$ には、それぞれ実関数 \tilde{g} を複素関数に変換する箇所および絶対値記号を含む指数関数の積分が含まれている。これらを用いて速度を求める際は(2-2)式に示すように、 $\tilde{p}_{1A}, \tilde{p}_{1B}$ の勾配の影響が大きく出る。このため、局所的に大きな変動を有す乱れた速度が得られ、この速度の傾斜が今度は圧力において乱れを生成すると考えられる。

一方、(5-1)式は既述のように実現象を想定して用いられる周期境界条件により安定化した解である。そこで非常に小さい領域で大きく乱れ、それらの圧力が集まると互いに大きな乱れ部が相殺され、全体として安定したより大きな領域の形に纏まると推察される。前者が第3階層に属する圧

力で、後者が第2階層に属する渦構造圧力としている。第1報において、これら圧力の分布状況を計算を行なっている。

(4) 階層構造要素の表示

本解析ではフーリエ変換よりラプラス変換の方が実現象を取扱い易い。同様に現象の表示もフーリエ級数より指数関数の級数表示の方が、局所的現象が重要な本解析には適している。一方、指数関数の級数表示はフーリエ級数表示のように確立した方式は見当たらない。そこで、本研究では有限区間の三角関数を指数関数で近似する方法を用い、次式で与える。

$$\cos \frac{(2j-1)\pi y}{2L_y} \cong \sum_{m=0}^{2j-1} (-1)^m \times \left(e^{-\frac{2(2j-1)\pi}{4L_y} \left| y - \frac{2mL_y}{2j-1} \right|} \dots e^{-\frac{m_k(2j-1)\pi}{4L_y} \left| y - \frac{2mL_y}{2j-1} \right|} \dots e^{-\frac{12(2j-1)\pi}{4L_y} \left| y - \frac{2mL_y}{2j-1} \right|} \right) \begin{pmatrix} a_{p0} \\ \vdots \\ a_{p6} \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

ここで、 $m_k = 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12$ で与え、 a_{p0}, \dots, a_{p6} は表 5-2 に与える。(5-2)式を用いた有限域の三角関数の近似の様子を図 5-2 に示す。図よりこの近似は妥当と考えられる。

同様に入口部主流速度 \tilde{U}_0 に関しても指数関数の和で、次の様に単純化して求められる。

$$\tilde{U}_0 \cong 20.37 \left(1 - e^{-\frac{y}{16}} - e^{-\frac{y}{80}} - e^{-\frac{9y}{400}} \right) \quad (5-3)$$

(5-3)式の近似の様子は図 5-4 に示すように簡単な式ではあるが妥当とみなせる。ただし、本研究では境界層内の式の特徴を維持するため、次式のような折衷した式を用いている。

$$\tilde{u}_0 = \begin{cases} \left(\frac{\log y_0}{0.41} + 5 \right) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3.67(35-y_0)}{42} \right\}^k \right] e^{-\frac{3.67(35-y_0)}{42}} - 3.1y_0 e^{-\frac{y_0}{2.23}} & ; 0.5 \leq y_0 < 35 \\ 20.37 + \left(\frac{\log y_0}{0.41} - 15.37 \right) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3.67(y_0-35)}{168} \right\}^k \right] \times e^{-\frac{3.67(35-y_0)}{42}} & ; 35 \leq y_0 < 1000 \end{cases} \quad (5-4)$$

ここで \tilde{u}_0 は区間内の速度分布 $\tilde{u}(x, y)$ を標準化し、

$$\tilde{u}(x, y) = \tilde{u}_0(y_0), \quad y_0 \equiv y^{1+c_0x}; \quad c_0 = 1.523 \times 10^{-5}$$

として与えた標準速度である。(5-4)式により、速度分布関数は複数回 x, y の微分ができるように変換されている。

この方式を用いると、圧力 \tilde{p}_1 は次式の表わせる。

$$\tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{L_y}(y-L_y+|y-L_y|)} \\ e^{-\frac{6}{L_y}(y-L_y+|y-L_y|)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{3}{L_y}(y-L_y+|y-L_y|)} \\ 1 - e^{-\frac{6}{L_y}(y-L_y+|y-L_y|)} \end{pmatrix} \times \sum_{j=1}^N \gamma_{1j}^2 a_{g1(2j-1)} \sum_{m=0}^{2j-1} (-1)^m \begin{pmatrix} e^{-\frac{|y-\beta_{ejm}|}{\gamma_{1j}}} & \dots & e^{-\frac{|y-\beta_{ejm}|}{\gamma_{7j}}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{p0} \cos \frac{z}{\gamma_{1j}} \\ \vdots \\ a_{p6} \cos \frac{z}{\gamma_{7j}} \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

ここで $\gamma_{kj} \equiv \frac{4L_y}{a_{pk}(2j-1)}$ および $\beta_{ejm} \equiv \frac{mL_y}{2j-1}$ 。

同様に、 $y-z$ 平面における2次元初期乱れ圧力 \tilde{p}_2 も(5-5)

式の係数 $a_{g1(2j-1)}$ を $a_{g2(j-1)}$ に代えることにより得られる。本解析で使用したこれらの係数の一覧を表 5-3 に与える。

これらの準備により第1報の計算ばかりでなく、表示の面でも精度向上が図られると考えられる。

6. 流体現象のダイナミック・シミュレーション

流体内の代表的な現象をいくつか用いて階層構造を作り、その階層内の動きと、その階層の特長を用いて表わす流体現象のダイナミック・シミュレーションが本格的に提示されてきたのは1990年代からである。これは図 6-1 に示す渦構造圧力の等圧面形状から名付けられた Head(;頭)、Neck(;首)、Leg(;足)が乱流境界層内で形成されていく様子を描いている。この資料²⁾はこのように単に乱流境界層内の渦構造圧力の成長過程ばかりでなく、その渦構造圧力により巻き込まれ生成するレイノルズ応力や乱れ速度間の応力にも言及し、最終的には以前より問題となっていた流れのバースト現象が周期的に生成されることまで言及している。上記資料中で個々に与えられている流体現象のダイナミック・シミュレーションから、それらを纏めての図 6-2 に

示す。渦構造圧力や渦のような構造要素と、流れや渦構造圧力の移動しながら成長するダイナミックスの両方を表わすには、圧力の方程式と流れに関する方程式の両方から求める必要がある。第1報で試みているダイナミックス・シミュレーションは図6-2の渦構造圧力 Head だけである。速度に関する方程式から速度・速度の積および速度と速度勾配との積等を求め、Headの近傍のダイナミック・シミュレーションが可能となる。そのためには今回の解析手法の充実ばかりでなく、図6-2のシステムを用いて求めるべき現象の絞り込みも重要となってくる。

7. 結言

流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式とそれに伴う圧力に関するポアソン方程式を線形項と非線形項に分離し、非線形項を外力項と扱い、局所的に線形として扱う連立線形偏微分方程式を関数解析を用いて解析解を求める。次にその解を用い外力項を更新して再度解析解を求める。以下、これを繰り返す、漸近解を求め、乱流境界層内の流体現象のダイナミックを求めるとを目的としている。

第1報において平均速度分布から渦構造圧力の定圧面形状、分布を求めることができるようになってきている。しかし第1報で実際に実流体を解析で用いた仮定および過程を明確にする必要があり、以下の項目を問題にし、下記のような解決策を本第2報で求めている。

(1) 連立線形偏微分方程式の収束方法

圧力および速度に関する線形偏微分方程式の解法として多次元収束問題に用いて収束性が良いと考えられる一つの方式を求めた。これにより現在圧力の収束解のみを検討しているが、圧力、速度を同時に収束させて、検討可能となると考えられる。

(2) 同期境界条件の有効性

同期境界条件は流れが発散しないための基本的なフィードバック・ループを掛けているのに相当し、風洞、水槽、内部流等良く見受けられる事柄であり、本解析において流れに強い影響を及ぼすことは流路幅が極端に狭い場合などを除き解析には影響ないと考えられる。

(3) 3次元ラプラス変換の利用

圧力に関する3次元ポアソン方程式の逆ラプラス変換は一般的に見つからないといわれており⁴⁾、第1報では2次元逆ラプラス-1次元逆フーリエ変換による解で代用しているが、安定性の面および境界条件が1つ入らなくなる欠点がある。そこで若干の関数近似を行い、3次元逆ラプラス変換による解を求めた。この解は第1報で用いた解の中に含まれる0次の第2種変形ベッセル関数の代わりに、この関数と指数関数と三角関数の積を用いた解となっており、第1報の解と傾向は一致している。今後定量的な解が

必要な折に有効になると考えられる。

(4) 階層構造の構成と表示方法

階層構造は3階層で与え、第1報で解析解と数値シミュレーションとの比較を行っている。しかし数値シミュレーションは2階層構造であることもあり解析解も数値シミュレーションで与えられている渦構造圧力と等圧面形状が得られることにとどまっておらず、渦構造圧力より更に小さいスケールの階層の圧力の解析は殆ど行われていない。これは解析で得られる級数解が実際の階層に対応していないためと考えられる。このため、第2報では有限領域を限定して指数関数の級数を構成できる方法を求めた。これにより階層のスケールに依らず解析は同じ方法で行うことが可能となり、この方式は解析の信頼性を上げるうえでも階層解析に適していると考えられる。

(5) 流体現象のダイナミック・シミュレーション

第1報では圧力の定圧面形状と流体現象の関連を求めたが、実際の流体現象のダイナミック・シミュレーションは複雑多岐に亘るため、1990年代の代表的な論文からその全体像を推定し、図示を行った。この結果は本解析法の目標を明確にするうえで重要になると考えられる。

以上より、第1報で開発した解析方法の有効性を、第2報で具体的な検討をした。すなわち、これまで個々に求めているナビエ・ストークス方程式の収束解とポアソン方程式の解法から、両方同時に求める式を求め、第1報の成果をそのまま流れ全体に拡張可能なことを示した。次に、流体現象では境界条件が非常に重要であるが、今まで x, y, z 方向全ての境界条件を満たす解法は見当たらず、第1報においても1方向はフーリエ変換を用いて解いていたが、第2報において、全ての境界条件を取り込める3次元ラプラス変換による近次解を見出し、具体的事象を扱えるようにしている。境界条件には平均速度と乱れ速度等、一意に与えにくい面がある。これに対応するため、解析法の中に実関数を複素関数に変換する過程があり、必ずしも乱れ速度を与えなくても解析中に乱れ速度が求められていく可能性がある。これを更に明確にしていくことにより乱れ速度を解析から求められる可能性が得られた。また、流体解析は何をもって解析可能と表現するのか不明確な点が残されているため、研究進歩の著しい境界層内の構成要素(structure element)と動き(motion)を用いた流体ダイナミックスを全てシミュレートすることが解析可能と考え、第1報、第2報で渦構造圧力までは解析可能なことを示した。解の一意性に関しては、その前段である表現の一意性の方式を提案している。

この結果、第1報で開発した本解析法を、実流体現象を具体的に解析する上で必要とする条件をクリアできる成果を第2報において得たと考えられる。

本研究では流体解析法の開発の面ばかりでなく、これま

で実験に依存していた乱れ速度、乱れ圧力を解析的に推定できる可能性が得られた。これにより、今後、更に低抗力で走行する必要のある船舶や航空機等の抗力の要因分析精度向上と改善方法の選定に実用的に有効な手法として期待できると考えられる。

8. 参考文献

- 1) 田中厚成、成 英恵、曾根良太；乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第1報）（初期渦構造圧力および初期乱れ速度分布の解析解）千葉科学大学紀要第3号、(2010. 3)
- 2) S. K. Robinson; The Kinematics of Turbulent Boundary Layer Structures, NASA TM103859, (1991. 4)
- 3) 田中厚成；ナビエ・ストークス方程式直接シミュレーションの積分解法について、防衛庁技術本部技報、第6632号、(1997. 2)
- 4) デッチュ、フェルカ；2次元ラプラス変換の理論と応用、法政大学出版局 (1968)
- 5) S. K. Robinson; A Review of Vortex Structures and Associated Coherent Motions in Turbulent Boundary Layer, Second IUTAM Symposium on Structure of Turbulence and Drag Reduction, (1989. 7)
- 6) P. R. Spalart; Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer Up to $Re_\theta = 1410$, J of Fluid Mech. Vol. 187, (1988)
- 7) J. Mulis, H. M. Tsai, P. Bradshaw; The Structure of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers, J of Fluid Mech., Vol. 122, (1982)
- 8) S. J. Kline; Research, Invention, Innovation and Production Model and Reality, Report INN-ID, Stanford Univ, (1985. 2)

表 5-1 圧力に関する階層構造

構造 NO.	圧力		外力		備考
	記号	内容	記号	内容	
I	\tilde{p}_I	平均速度から求まる 平均圧力	\tilde{g}_I	平均速度から求まる 外力項	高精度 $x-y$ 方向平均速度 分布の実験結果有
II	\tilde{p}_{II}	渦構想圧力 円柱/楕円体の低圧面形状 DNS解析結果有	\tilde{g}_{II}	平均速度分布から解析可 能	流体现象のダイナミック ・シミュレーション結 果を参考にしている
III	\tilde{p}_{III}	微小領域で急激な勾配を 持つ 微小乱れ圧力	\tilde{g}_{III}	平均速度分布から解析可 能	実際に形状等を明示し た資料は無い

表 5-2 三角関数の指数関数和近似の係数

係数	a_{p0}	a_{p1}	a_{p2}	a_{p3}	a_{p4}	a_{p5}	a_{p6}
値	0.042194	-0.42637	0.176361	37.325	-103.938	103.6025	-35.7938

表 5-3 圧力外力項関数 \tilde{g}_1 と \tilde{g}_2 のフーリエ級数展開の係数

係数	値	係数	値	係数	値	係数	値
a_{g11}	-6.09122	a_{g131}	0.03542	a_{g21}	-0.93656	a_{g231}	0.054674
a_{g13}	-0.04329	a_{g133}	0.034238	a_{g23}	-0.65425	a_{g233}	0.062465
a_{g15}	3.389496	a_{g135}	0.033501	a_{g25}	-0.30242	a_{g235}	0.06933
a_{g17}	2.316512	a_{g137}	0.033104	a_{g27}	-0.07665	a_{g237}	0.075359
a_{g19}	0.469469	a_{g139}	0.03281	a_{g29}	-0.00895	a_{g239}	0.080602
a_{g111}	-0.31859	a_{g141}	0.032604	a_{g211}	-0.02452	a_{g241}	0.085085
a_{g113}	-0.33366	a_{g143}	0.03236	a_{g213}	-0.05045	a_{g243}	0.088821
a_{g115}	-0.15124	a_{g145}	0.032705	a_{g215}	-0.05752	a_{g245}	0.091819
a_{g117}	-0.0163	a_{g147}	0.031671	a_{g217}	-0.04867	a_{g247}	0.094086
a_{g119}	0.041663	a_{g149}	0.031146	a_{g219}	-0.02812	a_{g249}	0.095629
a_{g121}	0.055669	a_{g151}	0.030457	a_{g221}	-0.00849	a_{g251}	0.096461
a_{g123}	0.05257	a_{g153}	0.029605	a_{g223}	0.008872	a_{g253}	0.096596
a_{g125}	0.046327	a_{g155}	0.028571	a_{g225}	0.023402	a_{g255}	0.096057
a_{g127}	0.040986	a_{g157}	0.027362	a_{g227}	0.035513	a_{g257}	0.075359
a_{g129}	0.037567	a_{g159}	0.025981	a_{g229}	0.045786	a_{g259}	0.080602

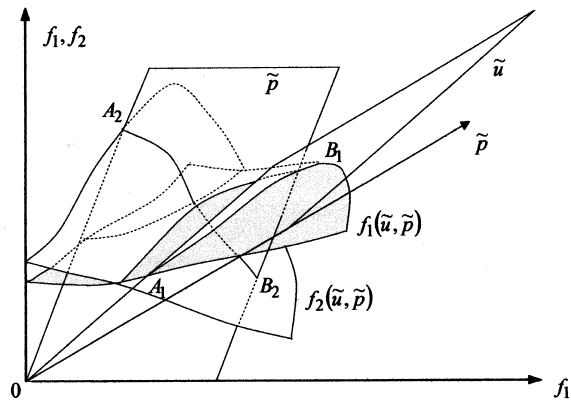


図 2-1 (2-8)式を表す曲面

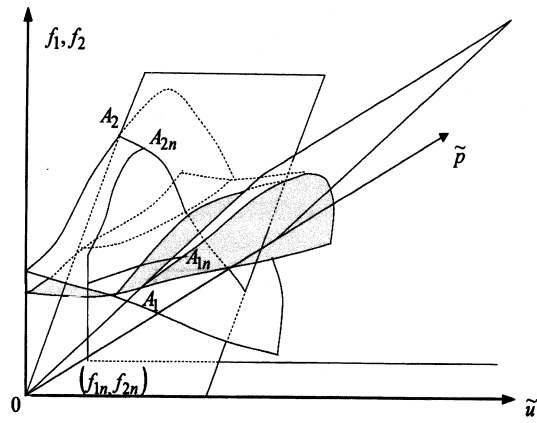


図 2-2 曲面上の収束過程

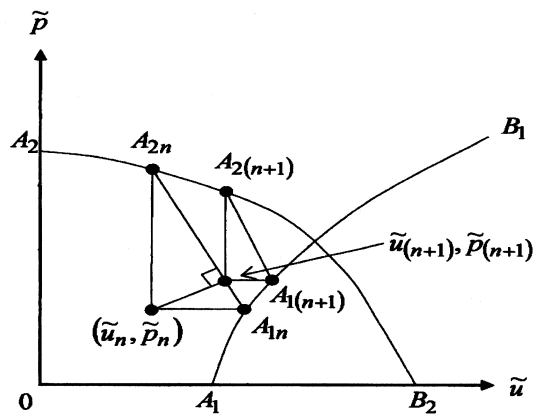


図 2-3 2次元収束過程

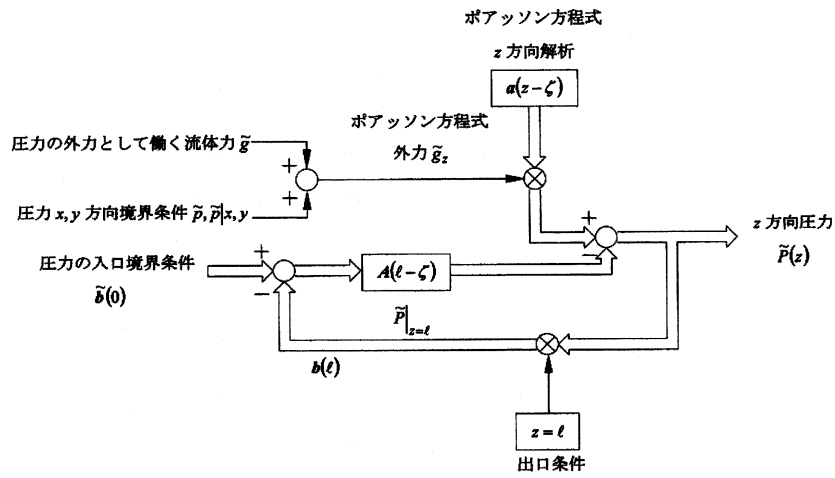


図 3-1 z 方向圧力解析方法のブロック線図

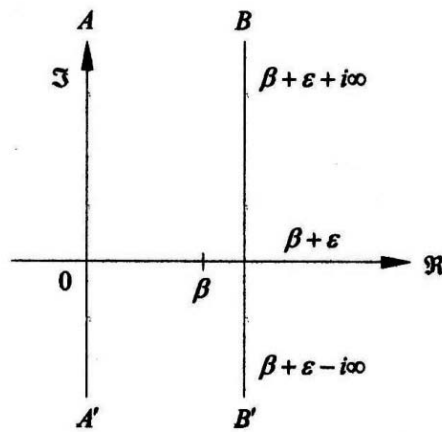


図 4-1 積分路

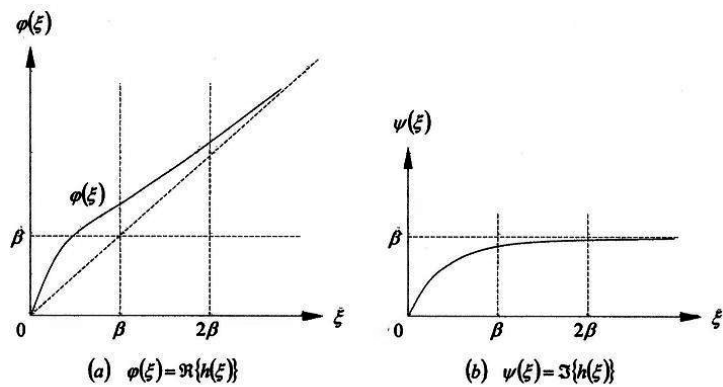
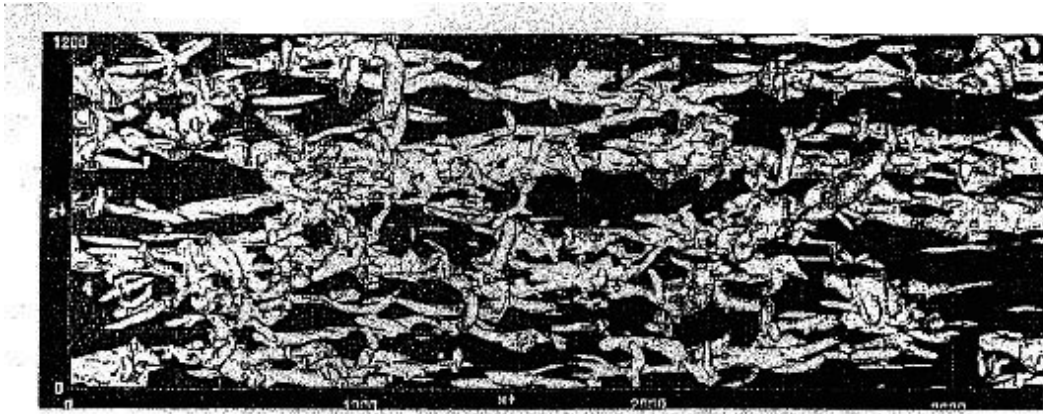


図 4-2 関数 $h(\zeta)$ の実部と虚部



乱流境界層内の等圧面分布²⁾

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{p}_{A1} = \tilde{g}_1 \quad \int_0^x \int_0^\xi \Re\{\tilde{g}_1(x-\phi, y+i\phi)\}d\phi d\xi$$

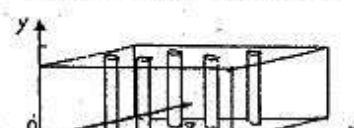
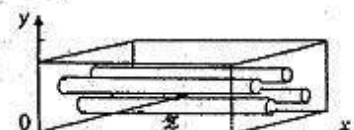
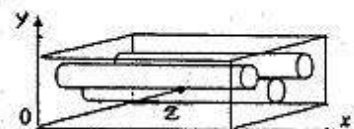
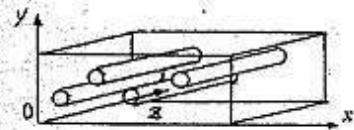
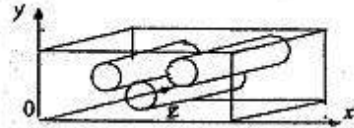
$$\int_0^y \int_0^\eta \Re\{\tilde{g}_1(x+i\phi, y-\phi)\}d\phi d\eta$$

$$\int_0^y \int_0^x \Im\{\tilde{g}_1(x+i\eta-\phi, i\phi)\}d\phi d\eta$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{p}_{A2} = \tilde{g}_2 \quad \int_0^z \int_0^\xi \Re\{\tilde{g}_2(y+i\phi, z-\phi)\}d\phi d\eta$$

$$\int_0^y \int_0^z \Im\{\tilde{g}_2(i\phi, z+i\eta-\phi)\}d\phi d\eta$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{p}_{A3} = \tilde{g}_3 \quad \int_0^z \int_0^\xi \Re\{\tilde{g}_3(x+i\phi, y-\phi)\}d\phi d\zeta$$



支配方程式

積分表示

概略等高面

図 5-12 次元乱れ圧力等高面概略図

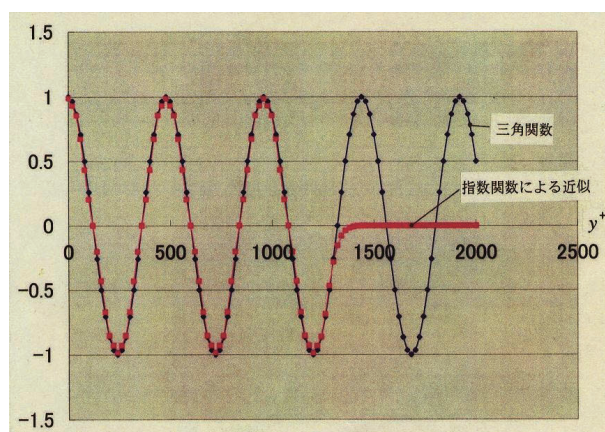


図 5-2 三角関数の指数関数による近似

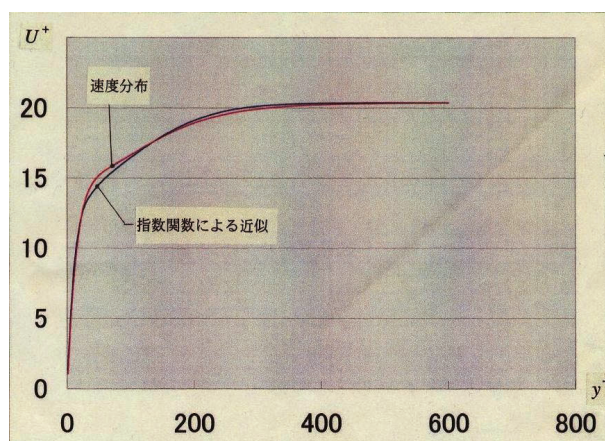


図 5-3 速度分布の指数関数による概略近似

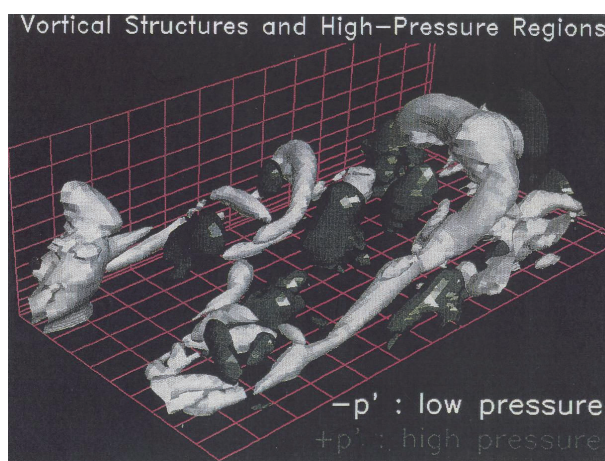


図 6-1 乱れ低圧力の等圧面(白色)²⁾

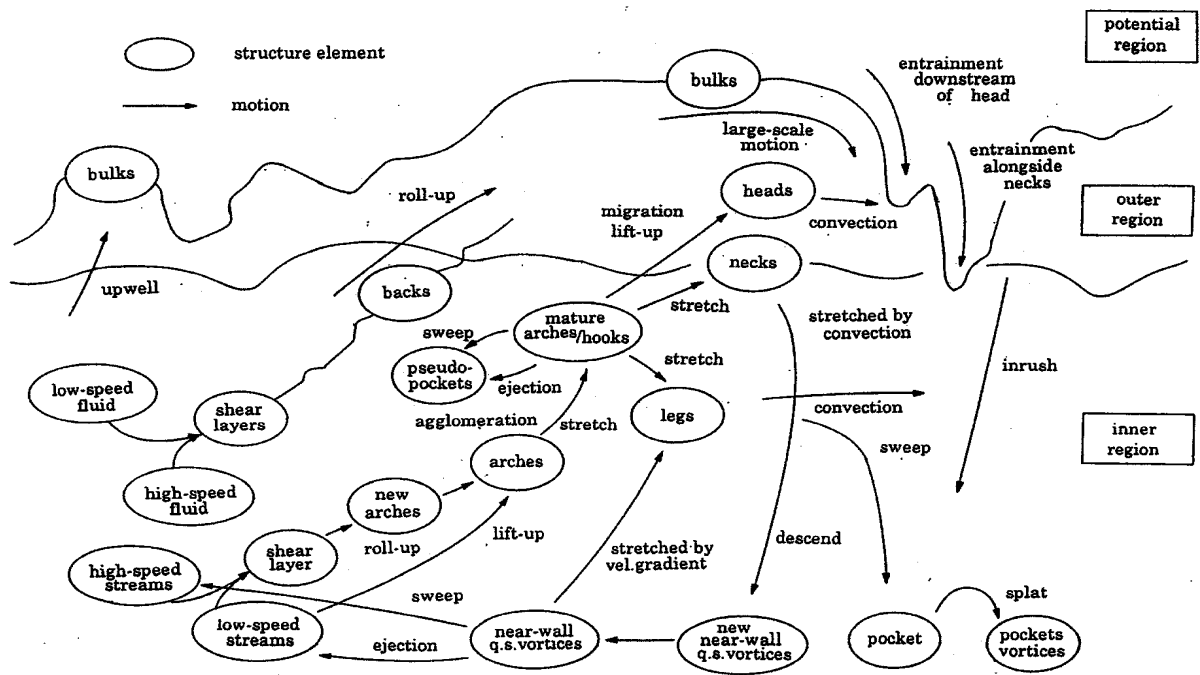


図 6-2 乱流境界層周りの流れ及び圧力のシステム推定図