

乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第1報）

—初期渦構造圧力及び初期乱れ速度分布の解析解—

On the Analytical Solution for the Vortex Structured Pressure of Turbulent Boundary Layer(Part1)

—Analytical Solution of Initial Vortex Structured Pressure
and Fluctuating Velocity—

田中 厚成¹⁾・成 英恵²⁾・曾根 諒太²⁾

Atsushige TANAKA, Hanae SEI and Ryota SONE

本研究は乱流境界層内の渦構造圧力と乱れ速度分布を、流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式とそれに伴う圧力のポアソン方程式を解析的に解く事ことを目的としている。本研究では、これらの解析解を求めるため、線形3次元ポアソン方程式に非線形の数値項からなる入力項を与えて解析的に圧力を求めている。次に、その圧力および非線形の数値項を外力項としてナビエ・ストークス方程式の線形項のみで構成される線形偏微分方程式をポアソン方程式と同様に解析的に求める。そして、これら解析解で得られる圧力および速度より新しい外力項を求め、これを用いて再度、解析解を求める。以後このプロセスを繰り返すことにより速度、圧力の解析的収束解を求める方式を採用している。

本研究の特長は、先ず一般的に解析解が無いといわれている3次元ポアソン方程式を解く際に周期境界条件を用いることにより、解析解が存在し実際に求められたことである。そして、この解を用いることにより現在進歩の著しい超大型スーパー・コンピュータを用いて行われている大規模数値流体計算による乱流境界層内の渦構造圧力分布および乱れ速度を解析的に求めることが可能となる。本研究の成果は発展してきた大規模な数値流体計算を解析的に裏付け、流れの特性をより明確にし計算を簡素化する上で、今後有用と期待される。

1. 緒言

1.1 流体力学の背景

私たちは常に空気や水に取り囲まれて生活している。そして空気や水は絶えず動いている。このような気体や液体の動きを流れといい、この流れを考えるのが流体力学である。つまり、流体力学について研究を行うことは、常に流体に囲まれて生きていく私たちにとって生活をより豊かで快適なものにする上で必要不可欠なことである。しかし、その身近さとは反して、流体現象は非常に複雑である。ナビエ・ストークス方程式は国際数学会より今世紀の代表的な4大難問の一つに選ばれ、未だ一般解は見出されていないことからわかるように、一般の特に、

連絡先：田中厚成 atstanaka@cis.ac.jp

1) 千葉科学大学危機管理学部防災システム学科

Department of Disaster System Science, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science

2) 千葉科学大学危機管理学部防災システム学科 (卒)

Department of Disaster System Science, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science

(2009年10月5日受付, 2009年12月18日受理)

流れが大きく乱れた乱流領域の流れに対して解析的な解を得ることが非常に困難であり、大きな壁が立ちはだかっているのが現状である。

1.2 数値流体力学

理論解析が足踏みしている中、めざましい発展をとげたのが数値流体力学である。とりわけ乱流は興味深い研究対象の一つとなっており、多くの研究者や技術者が挑戦している。これは複雑な構造を有する乱流現象が、基礎式であるナビエ・ストークス方程式により決定論的に予測できることが明らかになったことが背景にあり、大容量、超高速大型電子計算機の発達とともに、数値流体力学によるアプローチは乱流の解明を急速に進展させている。その中でも DNS（乱流現象を乱流モデルを使用せず、直接説く方法）と呼ばれる手法は、大きな役割を果たしており、また乱流モデルを含まない物理法則のみに基づく手法であることから、流れ場を選ばない不変的なものとして期待されている。

本研究の解析対象として乱流境界層（壁面から主流までの大部分の領域が乱流である境界層）に対し、Robinson²⁾は1991年に既に当時の超大型電子計算 CRAY XMP を用いて DNS 解析を行い、実時間で 20 時間ごとに再スタートをかけ、約 300 回の再スタートで計算結果を得ている。この結果として、乱れた圧力を解析すると多数の歪んだ円柱状の等圧面が現われ、これらは渦構造圧力と名付けられ、渦構造圧力と乱れ速度がどのような 3 次元内で挙動を取るかが、研究できるようになり、以後解明が急速に進んできている。

1.3 本研究の目的および方式

本研究の目的は前述の DNS 結果を解析的に検証するとともに、複雑な初期乱れ速度データを必要としない簡便で信頼性の高い解析法を確立することである。

本研究で採用した解析法は次のようである。すなわち本研究はナビエ・ストークス方程式を直接差分形式にするのではなく、方程式に含まれる慣性項、対流項、圧力項、粘性項のうち線形項を式の左辺にまとめ、右辺に非線形項および圧力項をまとめ、右辺項を外力のように扱って、線形偏微分方程式の解を先ず求め、次にその解により非線形項を含む外力を求める。この繰り返しによりポアソン方程式およびナビエ・ストークス方程式の収束解析解を求めることが可能となる。ここで解析解を求めるに際し、従来解析的に解けなかった 2 つの方程式に DNS 解析、風洞実験を参考に、周期境界条件を導入すると、これら 2 つの方程式の解析解を求めることが、多次元関数解析により示すことが、DNS 解析、風洞実験でも多く用いられている流れの周期境界条件を採用すると可能となる。

2. 圧力、速度に関する 3 次元ポアソン方程式の解法

2.1 壁面周期境界条件を持つ 3 次元ポアソン方程式の解法

x, y, z 方向の無次元速度をそれぞれ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 、時間を t 、圧力を \tilde{p} 、レイノルズ数を Re で与えると、流体の支配方程式

は次のように表わされる；

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-1)$$

ここで

$$\tilde{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}, \quad \nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\nabla' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2-2)$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla' \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(2-1) 式において連続の方程式 $\nabla' \cdot \mathbf{u} = 0$ を用いることにより、圧力に関する次の 3 次元ポアソン方程式が得られる；

$$\nabla^2 \tilde{p} = \tilde{g} \quad (2-3)$$

$$\tilde{g} = -\nabla' \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} \right\}$$

(2-3) 式を解析的に解くために、 x, y, z 、方向のラプラス演算子をそれぞれ u, v, w とし、(2-3) 式の両辺を次のように 3 次元ラプラス変換する；

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy-wz} \nabla^2 \tilde{p}(x, y, z) dx dy dz = \tilde{G}(u, v, w)$$

$$\tilde{G}(u, v, w)$$

$$\equiv -\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy-wz} \nabla' \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} \right\} \tilde{\mathbf{u}} dx dy dz \quad (2-4)$$

ここで速度ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}$ の初期値として境界層内平均速度分布を与え、それによって得られる外力の関数 \tilde{g} より、3 次元ポアソン方程式を求める。(2-4) 式より

$$\tilde{P}(u, v, w)$$

$$= \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2} \left\{ \tilde{G}(u, v, w) + u\tilde{p}(0, v, w) + \frac{\partial p}{\partial x}(0, v, w) \right.$$

$$\left. + v\tilde{p}(u, 0, w) + \frac{\partial p}{\partial y}(u, 0, w) + w\tilde{p}(u, v, 0) + \frac{\partial p}{\partial z}(u, v, 0) \right\} \quad (2-5)$$

で表わされる。この逆ラプラス変換による解は一般に存在しないことが知られている^{3), 4)}。これは逆ラプラス変換する式の中に特異点が固定できず、不定になる項が含まれるためであり、本稿ではこの項を除去するため、流れ方向である x 方向と横方向である y 方向の解析対称領域の両端境界に周期境界条

件を付与することにより、不定項が消去され解析解が存在することを導く。

すなわち、 z 方向の周期境界条件を下式で与える；

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x, y, 0) &= \tilde{p}(x, y, \ell) = c(x, y) \\ \tilde{p}_z(x, y, 0) &= \tilde{p}_z(x, y, \ell) = c_1(x, y)\end{aligned}\quad (2-6)$$

(2-5) 式、(2-6) 式より

$$\tilde{P}(u, v, w) = \frac{1}{w^2 + (u^2 + v^2)} \left\{ \tilde{G}_s(u, v, w) + w\tilde{C}(u, v) + \tilde{C}_1(u, v) \right\}\quad (2-7)$$

ここで

$$\begin{aligned}\tilde{G}_s(u, v, w) &\equiv \tilde{G}(u, v, w) + u\tilde{p}(0, v, w) + \frac{\partial p(0, v, w)}{\partial x} \\ &\quad + v\tilde{p}(u, 0, w) + \frac{\partial p(u, 0, w)}{\partial y}, \\ \tilde{C}(u, v) &\equiv L\{c(x, y)\}, \quad \tilde{C}_1(u, v) \equiv L\{c_1(x, y)\}\end{aligned}\quad (2-8)$$

(2-7) 式の z に関する逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u, v, z) &= \int_0^\ell \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} - (z-\zeta)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s(u, v, \zeta) d\zeta \\ &\quad - \int_z^\ell \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} + (\zeta-z)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s(u, v, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^z \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} - (z-\zeta)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s d\zeta \\ &\quad + \int_z^\ell \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} + (\zeta-z)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s d\zeta + \int_z^\ell \frac{\sin\sqrt{u^2+v^2}(\zeta-z)}{\sqrt{u^2+v^2}} \tilde{G}_s d\zeta \\ &= \int_0^z \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} - (z-\zeta)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s d\zeta \\ &\quad + \int_z^\ell \frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} - (\zeta-z)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tilde{G}_s d\zeta\end{aligned}\quad (2-9)$$

(2-9) 式より $\frac{\sin\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}$ の項が消え左辺の

ラプラス変換式は有意な解のみで表される。

(2-9) 式の積分を解くため、積分に含まれる関数をデュッチェ・フェルカ⁴⁾ で用いられている次のフーリエ級数展開で表示する。

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\ell}{2} - (z-\zeta)\right)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \\ &= \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{1}{u^2+v^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2k\pi}{\ell}(z-\zeta)}{u^2+v^2 - \left(\frac{2k\pi}{\ell}\right)^2} \right\}\end{aligned}$$

(2-9) 式は次式のような 2 次元ポアソン方程式の解と外力関数とのコンボリューションの和で表わすことが可能となる。

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u, v, z) &= \int_0^\ell \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{1}{u^2+v^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2k\pi}{\ell}(z-\zeta)}{u^2+v^2 - \left(\frac{2k\pi}{\ell}\right)^2} \right\} \tilde{G}_s(u, v, \zeta) d\zeta\end{aligned}\quad (2-10)$$

2.2 2次元ポアソン方程式の解法

(2-10) 式を逆ラプラス変換により解く際に、その解の中に指数的に無限大まで増大する発散する解が含まれている。この現実の現象と異なる解は、境界条件の設定に深く関連しており、適切な境界条件を与えることにより有意な解だけが得られることが知られている。

ここではデュッチェ・フェルカ⁴⁾ の方式に従い、2次元ポアソン方程式を 1次元関数解析の問題に帰着させる。

(2-10) 式の右辺括弧内第 2 項以降の逆変換を求めると、

$$\beta \equiv \frac{2k\pi}{\ell} \quad ; \quad k=1, 2, \dots \text{を用い関数}$$

$$\tilde{P}_\beta(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{v^2 - (\beta^2 - u^2)}\quad (2-11)$$

を先ず検討する。

ここで、 $f(u, \beta) \equiv \sqrt{\beta^2 - u^2}$ と置くと、発散項を含まない下記の関数 $\tilde{P}_\beta(u, v)$ を作る事ができる。

$$\tilde{P}_\beta(u, v) = \frac{G_\zeta(u, v, \zeta) - G_\zeta(u, f, \zeta)}{v^2 - f^2}\quad (2-12)$$

これは、境界条件を下記のように選ぶことによっても可能である。

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_\zeta(u, v, z) \\ & \equiv \tilde{G}(u, v, z) + u\tilde{p}(0, v, z) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(0, v, z) + v\tilde{p}(u, 0, z) \\ & + z\tilde{p}(u, v, 0) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}(u, v, 0), \\ & \tilde{G}_\zeta(u, f, z) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}(u, 0, z), \end{aligned}$$

したがって、(2-11)式の代わりに適切な境界条件を用い、(2-12)式を解くのは等価な変換とみなせ³⁾、以後は(2-10)式を解析する。
(2-10)式を解くために次のラプラス変換(以後 L で表す)を満たす関数 $H(x, y)$ を導入する；

$$\mathbf{L}\{H(x, y)\} = \int_0^\infty H(\xi, y)e^{-u\xi}d\xi = \frac{1}{2f(u, \beta)}e^{-y \cdot f(u, \beta)}$$

これより、(2-12)式は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{G}_\zeta(u, v) - \tilde{G}_\zeta(u, f)}{v^2 - f^2} \\ & = \int_0^\infty \tilde{G}_\zeta(u, \eta) \frac{e^{-v\eta} - e^{-f\eta}}{v^2 - f^2} d\eta \\ & = \int_0^\infty \tilde{G}_\zeta(u, \eta) \left\{ \frac{e^{-v\eta} - e^{-f\eta}}{2(v-f)f} - \frac{e^{-v\eta}}{2(v+f)f} + \frac{e^{-f\eta}}{2(v+f)f} \right\} d\eta \\ & = \int_0^\infty \tilde{G}_\zeta(u, \eta) \int_0^\infty \frac{1}{2f} \left\{ e^{-(v+\eta)f} - e^{-|y-\eta|f} \right\} d\eta e^{-vy} dy \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{G}_\zeta(u, \eta) \int_0^\infty \{H(\xi, y+\eta) - H(\xi, |y-\eta|)\} e^{-u\xi} d\xi d\eta e^{-vy} dy \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{G}_\zeta(u, v) - \tilde{G}_\zeta(u, f)}{v^2 - f^2}\right\} \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}_\zeta(\xi, \eta) \{H(x-\xi, y+\eta) - H(x-\xi, |y-\eta|)\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2-13)$$

ここで

$$H(x, y) = \begin{cases} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2f(u, \beta)}e^{-y \cdot f(u, \beta)}\right\} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

これにより、2次元ポアソン方程式は1次元ラプラス変換の問題に帰着される。

2.3 ラプラス変換とフーリエ変換

(2-11)式を満足する(2-14)式の間数 $H(x, y)$ を求めるため、ラプラス変換の例を図2-1に与える。図に与えられるように、(2-14)式の $f(s, \beta) = \sqrt{\beta^2 - s^2}$ に対応する逆ラプラス変換で求まる $H(x, y)$ を見出すことができなかった。そこで逆ラプラス変換の代わりに $\omega^2 = -s^2$ として逆フーリエ変換による例を図2-2に与える。これにより、

$$\begin{aligned} H(x, y) & = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} e^{-y\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}\right\} \\ & = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

で与えられる。

ここで、 K_0 は0次の第2種変形ベッセル関数。ラプラス-フーリエ変換を用いて、2次元ラプラスと同様にポアソン方程式は解くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{\tilde{G}_\zeta(i\omega, v) - \tilde{G}_\zeta(i\omega, f)}{v^2 - f^2}\right\} & = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}_\zeta(\xi, \eta) \\ & \times \{H(x-\xi, y+\eta) - H(x-\xi, |y-\eta|)\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2-15)$$

次に(2-10)式の右辺第1項を求める。デュッチェ・フエルカ⁴⁾より、

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(x, y, z) & = \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell d\phi d\xi d\zeta \\ & \times \{\tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta)\} \end{aligned} \quad (2-16)$$

となる。この(2-16)式の圧力は壁面の境界条件を満たすため、更に付加圧力が必要となるが、外力関数 \tilde{g} が殆ど y の関数だけで与えられ、影響が小さいため、ここでは省略する。以上より、外力関数 \tilde{g} による圧力は次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y, z) & = \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell \{\tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta)\} d\phi d\xi d\zeta \\ & + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi\ell} \int_0^\ell \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}\left\{K_0\left(\frac{2k\pi}{\ell}\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}\right)\right. \\ & \left. - K_0\left(\frac{2k\pi}{\ell}\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)\right\} \cos\frac{2k\pi}{\ell}(z-\zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (2-17)$$

圧力は z 方向以外にも、 x 方向にも周期境界条件を持つので、 x 方向の幅を L_x とし、 x 方向周期条件を持つ圧力 \tilde{p}_2 を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_2(x, y, z) &= \frac{1}{2L_x} \int_0^{L_x} \int_0^\xi \left\{ \tilde{g}(\xi, y + i\phi, \zeta - \phi) + \tilde{g}(\xi, y - i\phi, \zeta - \phi) \right\} d\phi d\zeta d\xi \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi L_x} \int_0^{L_x} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g} \left\{ K_0 \left(\frac{2k\pi}{L_x} \sqrt{(z-\zeta)^2 + (y+\eta)^2} \right) \right. \\
 &\left. - K_0 \left(\frac{2k\pi}{L_x} \sqrt{(z-\zeta)^2 + (y+\eta)^2} \right) \right\} \cos \frac{2k\pi}{L_2} (z-\xi) d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{2-18}$$

なお、 y 方向の周期境界条件に対応するため付加される変動圧力は外力関数 \tilde{g} が殆ど y の関数だけで与えられ、影響が小さいため、ここでは省略する。

2.4 速度ベクトルの関数解析による解法

速度に関する非線形項を圧力項と合わせて外力項として纏め、主流速度 \tilde{U} 、 x 方向の基準長さ L で無次元化し、流れのレイノルズ数を Re で与えると、無次元速度ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ は次式を満たす。

$$\left(\nabla^2 - \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{\mathbf{u}} = \text{Re} \tilde{\mathbf{f}} \tag{2-19}$$

ここで $\tilde{\mathbf{f}}$ は

$$\tilde{\mathbf{f}} = \nabla \tilde{p} - (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{u} \tag{2-20}$$

で与えられる。

上式を圧力の時と同様に、側壁に周期境界条件を加え、3次元ラプラス-フーリエ変換をすると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{U}}(u, v, z, s) &\equiv \mathbf{FLL} \left\{ \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) \right\} \\
 &= \int_0^\ell \frac{1}{\ell} d\zeta \tilde{\mathbf{F}}(u, i\omega, \zeta, s) \left\{ \frac{1}{v^2 - (\omega^2 + s)} \right. \\
 &\left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{\ell} (z - \zeta)}{v^2 - \left(\omega^2 + s + \left(\frac{2k\pi}{\ell} \right)^2 \right)} \right\}
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

圧力の解析と同様に、デュッチェ・フェルカ⁴⁾より境界条件を適切に取ることにより、現実の流れには起こらない(2-21)式に含まれる発散する流れを取り除き解析解を求める。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) &= \frac{\text{Re}}{\ell} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\ell R_{fr} \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 R_{fr} &\equiv \frac{\text{Re}}{4\pi(t-\tau)} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\text{Re}(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4\text{Re}(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\text{Re}(t-\tau)}} \right\} \\
 &\times \frac{\sinh \frac{2\pi \text{Re}(t-\tau)}{\ell}}{\cosh \frac{2\pi \text{Re}(t-\tau)}{\ell} - \cos \frac{2\pi(z-\zeta)}{\ell}}
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

3. 初期乱れ圧力分布の計算

3.1 初期乱れ圧力分布の計算フロー

初期乱れ圧力分布の計算フローを本稿で用いる数式解析による圧力分布の計算フローを数値実験による計算フローと比較して図3-1に与える。大規模数値計算シミュレーションによる、いわゆる数値実験結果を円柱形状に近い渦構造形状を最小形状として与えられている。その流れ解析は、それら渦構造形状で与えられる種々の閉曲面体の間のダイナミクスとして行われている。一方数値解析で得られる圧力は(2-17)、(2-18)式の中の第2種ベッセル関数で表され、有限値に収まらずその結果等圧線が形づくる曲面が直接、数値実験で得られるような閉曲面体とならない形で与えられる。

同じナビエ・ストークス方程式とポアソン方程式から、これら2つの結果が導かれているため、本研究は事象を次の3階層に分けて、階層内の事象と階層間の関係を検討することにした。

(1) 数式解析で与えられる極めて小さい圧力分布

周期境界条件を有す圧力に関するポアソン方程式の解は、外力項を構成する速度の実関数を複素関数に変換し積分する項と、外力項と第2種ベッセル関数の積を積分する項の和で表される。この解は速度分布に極めて鋭敏に影響される非常に小さいスケールの事象を表している。

これらの事象の代表長さはDNSで求められている渦構造圧力や乱れた速度が作るレイノルズ応力の代表長さに比べると極めて小さく、いくつか組み合わせられて更に大きなスケールで安定な渦構造圧力を構成することが考えられる。本研究では便宜的に7つの非常に小さなスケールの圧力分布が1つの組となり、それらの線形和で圧力の強さがガウス分布に近い渦構造圧力が構成されることを示し、階層間のスケールの相違を定量的に示すため、線形和の係数を表に纏める。

(2) 渦構造圧力

これまで、流れの中の渦は馬蹄形渦に代表されるような対を成す互いに逆の回転方向を有す渦の解析が主であり、単独に存在する渦の概念はあまり見られなかった。しかし、この単独の渦の構造を圧力にまで拡張、渦構造圧力の概念が1990年代にRobinson⁴⁾、Kline⁸⁾等により大規模な数値実験結果を基に

提案された。彼らは乱流境界層内に含まれる渦構造圧力の形状の相違により、従来の境界層の特徴が説明できること。そして境界層が発達して、やがてパースティング⁴⁾⁵⁾を引き起こすまでの境界層の動力学についても渦構造圧力を用いて言及している。したがって、これら渦構造圧力が境界層の特性を表す最小単位とも考えることができる。そこで本研究においては、これら渦構造圧力を境界層内の壁からの高さ、軸方向、半径で規格化し、この規格化された同じ高さを有す数個の渦構造圧力の外力関数を用いて、さらに大きなスケールである境界層内速度分布から導かれる境界層内全域の外力関数を求める。一つ一つの渦構造圧力の外力関数は渦構造圧力のスケールの波形で与えられるため、境界層全体の滑らかな外力関数とは傾向が大きく異なっている。そこで本稿では、解析解から数値実験解に移行する時と同様に、数個の渦構造圧力の外力関数が組みとなり、その線形和により境界層内の代表高さでの滑らかな外力関数を求めている。階層間のスケールの相違を定量的に示すため、線形和の係数を表に纏める。

(3) 境界層内平均速度分布

境界層は乱流低層、対数領域、後流領域に分かれ、圧力方程式の外力関数はこの領域の接続部付近で大きな値を示している⁶⁾。そこで本稿では、この領域の接続を2階微分まで有効な関数を用いて行った。これにより比較的滑らかな外力関数が得られ、この外力関数を構成する渦構造圧力の外力関数の線形和の係数を基に渦構造圧力の中心の強さを求めることにより、乱流境界層内の渦構造圧力の分布ができる。これにより、乱流境界層の特徴である渦構造圧力を実際に計測された境界層内平均速度分布から収束計算により求めることが可能であると考えられる。

3.2 圧力に関する初期外力関数の算出

本稿で用いる計算フローを図3-1に与え、Robinson²⁾、Sparlart⁶⁾で用いられ、本稿でも使用する乱流境界層内の無次元平均速度分布を図3-2に与える。ここで、ある決められた x 位置での摩擦速度を速度無次元化に用いる摩擦速度として定め、すべての位置の速度を求めるのに用いる。その結果無次元主流速度が常に一定になるようにする。 $x=0$ における速度分布を \tilde{u}_0 とし、 x の位置での摩擦速度の違いによる速度分布の相違は次式で表わせるとする。

$$\tilde{u}(x, y) = \tilde{u}_0(0, y_0) \quad ; \quad y_0 = y^{1+c_0x}, \quad c_0 = 1.523 \times 10^{-5} \tag{3-1}$$

(3-1)式と質量保存則より、 $x-y$ 平面の速度および速度勾配は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= c_0 \int_0^{y_0} y_0 (1+c_0x \log y_0) \log y_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y_0} dy_0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -\frac{c_0}{1+c_0x} y_0 \log y_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= \frac{c_0}{1+c_0x} y_0^{-c_0x} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{c_0}{1+c_0x} \int_0^{y_0} y_0 (1+c_0x \log y_0) \log y_0 \\ &\quad \times \left\{ (2 + \log y_0) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y_0} + y_0 \log y_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial y_0^2} \right\} dy_0 \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= \frac{c_0}{1+c_0x} y_0 \log y_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y_0} \end{aligned} \tag{3-2}$$

(3-2)式より平均流速分布より求まる外力関数 \tilde{g}_1 を計算するために、先ず図3-2で与えられる速度分布を関数近似して与える。速度分布を関数近似する時に、境界層速度分布の特長である対数分布領域が変化しないように、下記のように対数領域で分割して関数近似を行なう。

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{\log y_0}{0.41} + 5 \right) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3.6(35-y_0)}{42} \right\}^k \right] e^{-\frac{3.6(35-y_0)}{42}} - 3.1y_0 e^{-2.23} & ; 0.5 \leq y_0 < 35 \\ 2037 + \left(\frac{\log y_0}{0.41} - 1537 \right) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3.6(35-y_0)}{168} \right\}^k \right] e^{-\frac{3.6(35-y_0)}{168}} & ; 35 \leq y_0 < 1000 \end{cases} \tag{3-3}$$

(3-3)式を用いて、(3-2)式で速度勾配を求めたグラフを図3-3に与える。

外力関数 \tilde{g}_1 は質量保存則を用いると簡単化され、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \end{aligned} \tag{3-4}$$

ここで、 \tilde{g} を求めるのは、平均速度だけでなく、変動速度成分も入れることが望ましいが、本研究では、速度分布から圧力分布を求め、その圧力分布から速度分布を求める過程を繰り返すことにより、圧力分布を漸近的に求めていく方式を採用している。そのため、初期圧力分布を求める場合は、変動速度分布をいれずに先ず平均速度分布だけから求める。圧力が両側の壁において周期境界条件を有している場合から求めることに

する。質量保存則から (3-4) 式は次のように更に簡単化される。

$$\tilde{g} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \quad (3-5)$$

x の影響は少なく、殆ど y だけの関数で与えられる。(3-2)、(3-5) 式により計算された \tilde{g} を図3-4に与える。

3.2-1 渦構造を有する初期乱れ圧力分布

(3-5) 式を用いて圧力を計算するに際し、Robinson の DNS 解析結果²⁾ を参考にす。すなわち、解析領域内の圧力は数百の渦構造 \tilde{p}_c を持ち、それぞれの渦構造が対応する小さな外力関数 \tilde{g}_c により生成されるとする。(2-15) 式の計算を簡単化するため、第2種変形ベッセル関数の定積分を次式で近似する；

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K_0 \left(\frac{2k\pi}{\ell} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{0.85 \left(\frac{2k\pi}{\ell} \right)^2} \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \end{aligned} \quad (3-6)$$

ここで、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数。これより、(2-15) 式は次のようになる；

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_c \\ & \equiv \frac{1}{2\ell} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} d\phi d\xi d\zeta \\ & \quad \times \{ \tilde{g}_c(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}_c(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta) \} \\ & + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right)}{0.85} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} \frac{1}{\left(\frac{2k\pi}{\ell} \right)^2} \tilde{g}_c(x, y, \zeta) \cos \frac{2k\pi(z-\zeta)}{\ell} d\zeta \end{aligned} \quad (3-7)$$

前述の DNS 解析結果²⁾ によると、第2項の各項は第1項と比べ、省略できるほど小さいが、第1項だけでは幅方向に有限の長さを有す円柱状の渦構造を再現できないため、これを修正する役割を担っていると考えられる。このため、この初期乱れ圧力分布を求める式を第1項に含ませ、次のように簡単化して与える。

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_c \\ & = \tilde{p}_{cxy}(x, y) \cdot \tilde{p}_{cz}(z) \\ & \tilde{p}_{cxy}(x, y) \\ & \equiv \sum_{p=1}^7 a_{c1p} e^{-\frac{b_{c1p}|y-\beta_1|}{\gamma_1}} \left\{ 1 + c_{c1p} \cos \frac{b_{c1p}(x+d_{1p})}{\gamma_1} \right\} \end{aligned} \quad (3-8)$$

\tilde{p}_{cxy} は数値実験結果より、ほぼ円形の渦構造を形成しているので、(3-8) 式の係数 $a_{c1p}, b_{c1p}, c_{c1p}$ ($p=1, 2, \dots, 7$) の値を定め、 \tilde{p}_{cxy} が高さ1の正規分布になるように調整する。簡単化し $d_{1p} = 0$; $p=1, 2, \dots, 7$ とする。

2次元正規分布を $x=0, y=0$ の2断面において1次元正規分布になることより、次式の関係式が成り立つ；

$$\tilde{p}_{cxy} \Big|_{\beta_1=\dots=\beta_7=0}^{x=0} = \sum_{p=1}^7 a_{c1p} e^{-\frac{b_{c1p}|y|}{\gamma_1}} (1 + c_{c1p}) \equiv e^{-\frac{y^2}{2\gamma_1^2}} \quad (3-9)$$

$$\tilde{p}_{cxy} \Big|_{\beta_1=\dots=\beta_7=0}^{y=0} = \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \left(1 + c_{c1p} \cos \frac{b_{c1p}x}{\gamma_1} \right) \equiv e^{-\frac{x^2}{2\gamma_1^2}} \quad (3-10)$$

正規分布関数のフーリエ級数展開を参考に

$$b_{c1p} = \frac{(2p-1)\pi}{20} \quad (3-11)$$

と与えると a_{c1p}, c_{c1p} は表3-2で表わされる。

表3-2の係数を用いて得られる2次元正規分布関数の近似関数を図3-5に与える。この圧力を数値実験結果²⁾ で表わされる多数の渦構造に対応させるため、以後単独で存在する渦構造の半径、代表圧力 $\gamma_1, \tilde{p}_{cxy}$ の代わりに、多数の渦構造の半径および代表圧力 $\gamma_{1mk}, \tilde{p}_{c1mk}$; $m=1, 2, \dots, 5$ $k=1, 2, \dots$ の表示を用いる。 \tilde{p}_{c1mk} をポアソン方程式に入れると、外力関数 \tilde{g}_{c1mk} は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \tilde{g}_{c1mk}(y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{p}_{c1mk}(x, y) \\ & = \sum_{p=1}^7 \left(\frac{b_{c1p}}{\gamma_{1mk}} \right)^2 e^{-\frac{b_{c1p}|y-\beta_{1p}|}{\gamma_{1mk}}} \end{aligned} \quad (3-12)$$

ここで、 $\beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{17} = 100$, $\gamma_{1mk} = 25$ とした場合の \tilde{g}_{c1mk} を図3-6に与える。これより \tilde{g}_{c1mk} のグラフは渦構造の圧力のグラフにくらべ、窪みのある複雑な形になっている。 z 方向の圧力分布による \tilde{g}_{c1mk} の補正として、ここでは次の補正係数 c_{z1mk} を用いる。

$$\begin{aligned} c_{z1mk} & \equiv \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{p}_{cz}(\zeta) d\zeta \\ & = \frac{0.64\pi\gamma_{z1mk}}{\ell} \end{aligned} \quad (3-13)$$

ここで、 γ_{z1mk} は z 方向に延びる渦構造の円柱状の長さの半分の値を示し、 $c_{z1mk} \cdot \tilde{g}_{c1mk}$ は z 方向に分布する外力関数を平均化し、 z 方向は一定値のように簡単化した外力関数である。

3.3 初期乱れ圧力の外力関数 \tilde{g} の選定

3.3-1 x 方向と z 方向に軸を持つ2種類の渦構造に対応する外力関数 \tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c} の選定

圧力に関する3次元渦構造は数値実験²⁾で与えられるように x 方向に軸を持つ円柱状の渦構造と、 y 方向、 z 方向に軸を持つ渦構造の3種類に大別される。 y 方向の周期境界条件は考えにくく、数値実験結果にも底面に垂直な渦構造は見当たらないので、外力関数は x 方向と z 方向に軸を持つ2種類の渦構造に対応すると考えられる。

これをそれぞれ \tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c} で与えると外力関数に関して次式が成り立つ。

$$\tilde{g}_c = \tilde{g}_{1c} + \tilde{g}_{2c} \quad (3-14)$$

ここで \tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c} はそれぞれ z 方向、 x 方向に軸を持つ多数の渦構造の圧力に対応する多数の外力関数の和で与えられる。

\tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c} を求めるため、数値実験結果より多数の渦構造の圧力の傾向を調べる。渦構造の代表渦直径と軸の y 方向位置を図3-7、図3-8に示す。 z 方向、 x 方向に軸を持つ渦構造の半径をそれぞれ γ_1 , γ_2 とすると、図より次式のように近似できる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\cong 0.18y \\ \gamma_2 &\cong 0.5y \end{aligned} \quad (3-15)$$

同じ y の高さの外力関数 \tilde{g}_{c1mk} と \tilde{g}_{c2nk} は大きな違いはないと考えられるため、数値実験結果²⁾で与えられる y 方向の領域に含まれる渦構造の個数分布(図3-9)より、簡単化して、次のように与える。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{1c} &\cong \frac{g_{1c} \text{型渦構造の数}}{\tilde{g}_{1c} \text{型渦構造の数} + \tilde{g}_{2c} \text{型渦構造の数}} \times \tilde{g}_c \\ \tilde{g}_{2c} &\cong \frac{g_{2c} \text{型渦構造の数}}{\tilde{g}_{1c} \text{型渦構造の数} + \tilde{g}_{2c} \text{型渦構造の数}} \times \tilde{g}_c \end{aligned} \quad (3-16)$$

(3-12)式で求まる \tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c} を図3-4に示す。

3.3-2 渦構造に対応する外力関数 \tilde{g}_{c1m} , \tilde{g}_{c2n} の選定

図3-7に数値実験²⁾で得られた渦構造の代表直径と軸中心の y 方向位置が与える。これを簡単化して、図中の菱形で表わされる点で代表して解析を行う。すなわち、 z 方向に軸を持つ渦構造の数を y 方向の位置数 $N_m = 18$ 、その y の位置にそれぞれ z 方向に軸を持つ $N_{1k} = 7$ 個の渦構造を対応させる。同様に x 方向に軸を持つ渦構造は y 方向の位置数 $N_n = 9$ 、その y の位置にそれぞれ z 方向に $N_{2k} = 7$ 個の渦構造で代表する。

y 方向の位置に置かれた7個の渦構造は代表渦半径は決められているが、渦構造のピーク値は決まっていない。そこで、図3-1に示すような順序で実験で得られる外力関数に一致する渦構造を持つ個々の圧力に対応する外力関数

\tilde{g}_{c1mk} ($m=1, 2, \dots, 18, k=1, 2, \dots, 7$)を求める。ここで図3-1の具体的な説明は下記で与えられる。

(a) 渦構造の圧力の等圧面形状を長軸が z 方向の楕円体で与えられる \tilde{p}_{c1mk} と長軸が x 方向の \tilde{p}_{c2nk} の2種類で与える。ここでは乱流現象を説明するために良く使われる \tilde{p}_{c1mk} に着目し、定量的にこのピーク圧力を求める方式を検討する。
(b) \tilde{p}_{c1mk} に対応する外力関数 \tilde{g}_{c1mk} は鋭い先端を有し、実際の流れには、幾つかの \tilde{g}_{c1mk} が調和の取れた重ね合わせにより、正規分布関数に似て且つ擬似直交性を有す分布を有す \tilde{g}_{c1m} を構成していると仮定する。重ね合わせの個数は、 y 方向に対して求めた \tilde{p}_{c1mk} の個数に合わせ、7個をそのまま用い、 \tilde{g}_{c1m} を次式で表す；

$$\tilde{g}_{c1m} \cong \sum_{k=1}^7 c_{1mk} \cdot \frac{4\gamma_{1mk} \cdot \gamma_{z1mk}}{L_x \cdot \ell} \cdot \tilde{g}_{c1mk} \quad (3-17)$$

ここで、 \tilde{g}_{c1m} は平均速度分布より求まるので、(3-17)式を用いて \tilde{g}_{c1m} は流れの全域で平均して求めている。

(c) 平均速度分布から得られる定量化された外力関数 \tilde{g}_{c1} を上記擬似直交関数 \tilde{g}_{c1m} の線形和でほぼ一意的に表現する。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{c1} &\cong \sum_{m=1}^{18} d_{1m0} \cdot \tilde{g}_{c1m} \\ &= \sum_{k=1}^7 d_{1m0} \cdot \frac{2\gamma_{1mk}}{L_x} \cdot c_{1mk} \cdot \frac{2\gamma_{z1mk}}{\ell} \cdot \tilde{g}_{c1mk} \end{aligned} \quad (3-18)$$

以上の計算を行なうことにより、実流体の実験値で与えられる外力関数 \tilde{g}_{c1} を構成するピーク圧力1の渦構造を持つ圧力に対応する外力関数 \tilde{g}_{c1mk} の係数が求まる。したがって、この係数は当初の規格化された圧力を実際の圧力に代えているのに相当し、当初、定まっていなかった圧力のピーク値と見なすことができ、次式で与えられる。

$$\tilde{p}_{m1mk} \cong d_{1m0} \cdot c_{1mk} \cdot \frac{4\gamma_{1mk} \cdot \gamma_{z1mk}}{L_x \cdot \ell} \quad (3-19)$$

上記ピーク値を用いると、 z 方向に軸を持つ渦構造の圧力の $x-y$ における初期値は次式で近似される。

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{c1mk} &\cong \sum_{q=1}^{N_q} \tilde{p}_{c1mkq} \\ &= \sum_{q=1}^{N_q} \tilde{p}_{m1mkq} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} e^{\frac{b_{c1p}|y-\beta_{1m}|}{\gamma_{1mk}}} \\ &\quad \times \left\{ 1 + c_{c1p} \cos \frac{b_{c1p}(x - \alpha_{1mpq})}{\gamma_{1mk}} \right\} \end{aligned} \quad (3-20)$$

ここで、 \tilde{p}_{c1mk} は渦構造の軸の y 座標とその圧力分布の代表半径 γ_{1mk} が既知であるが、そのような渦構造が選定領域に唯一存続することは仮定していないため、便宜的に複数個(N_q)

個) 存在し、その軸の x 座標を α_{1mpq} ; $q=1, 2, \dots, N_q$ で与える。

上記過程により求められた渦構造圧力の具体的な値を以下にあてる；

図 3-7 の菱形で表わされる渦構造の代表半径を有す圧力の中心の y 座標を β_{21m}, β_{22n} 、およびその代表半径を $\gamma_{21mk}, \gamma_{22nk}$ と置き、これらの値を表 3-2 で与える。また、(3-20) 式を用い計算して得られた $c_{21mk} \cdot \frac{2\gamma_{z21mk}}{\ell}$ および $c_{22nk} \cdot \frac{2\gamma_{z22nk}}{\ell}$ の値を表 3-3 に与える。

(3-18) 式により \tilde{g}_{clm} のグラフを求め図 3-10 に与える。ここで、表 3-3 の係数 $c_{1mk} \cdot \frac{2\gamma_{z1mk}}{\ell}$ 、 $c_{2nk} \cdot \frac{2\gamma_{z2nk}}{\ell}$ は数値実験結果から推定すると同じ y の位置では同程度の値を示すと予想されるが、 $k=1, 2, 7$ の値は他と比べ極めて小さい。これは、図 3-6 に示す渦半径の分布の単純化して近似する過程で、渦半径の分布を分布を仮定した y の位置の分布が上記係数の値に極めて大きな影響を複雑に及ぼしているためと思われる。また、 \tilde{g}_{clm} のグラフの概略形状は図 3-5 に示すように最高値を約 1.0、最小値を約 -0.2 になるよう便宜的に選択しているが、この影響も非常に大きいと推察されるので、本来は大型計算機を用いて分割数 m を十分大きく選び、図 3-5 の \tilde{g}_{clm} 形状に係数が同程度の条件を入れながら解析し、この問題を解消することが望ましいと考えられる。本稿では解析方法の妥当性を示すのが主目的であるため、このまま上記表 3-2、表 3-3 の値を用い、計算を行なう。

計算した(3-18)式の係数 d_{1m0} を表 3-4 に、 \tilde{g}_{clm} と d_{1m0} による \tilde{g}_{cl} の近似状態を図 3-11 に与える。近似曲線は振動が含まれているが、これは y 方向の分割数が少ないためで近似としては十分と考えられる。これより、(3-17) 式のピーク値 \tilde{p}_{m1mk} を表 3-5 で与える。数値実験結果より渦構造圧力のピーク値の絶対値としては

$$|\tilde{p}_{m1mk}| \cong 4 \sim 20 \quad (3-21)$$

が予想されるが、設定した代表半径は重複しても構わないので、大きな値を持つ場合には同じ半径の圧力が x 座標、 z 座標の異なる位置に複数あり、(3-20) 式が成り立っていると扱っている。数値実験結果の可視化図より渦構造の直径の大きい順番数を横軸に、縦軸を直径に取り、同時に図 3-7、図 3-8 の値を併記すると図 3-12、図 3-13 のようになる。これにより可視化図より求められる渦構造の長さに関するデータを初期値として用いることが可能となり、引き続き解析解の精度向上に役立つことが期待される。

4. 初期乱れ速度

4.1 初期乱れ圧力分布より求める初期乱れ速度分布

2次元初期乱れ圧力が求まると、その圧力の関数を外力として線形偏微分方程式を解くことにより、2次元初期乱れ速度が求まる。

3次元ナビエ・ストークス方程式の速度に関する線形項を左辺に、圧力項と非線形の対流項を右辺に移すと、流体の支配方程式は次のようになる。

$$\left(\nabla^2 - \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{\mathbf{u}} = \text{Re} \tilde{\mathbf{f}} \quad (4-1)$$

ここで Re はせん断速度を基準にしたレイノルズ数、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は速度ベクトル、 $\tilde{\mathbf{f}}$ は外力ベクトルで下式で表される。

$$\tilde{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

外力 $\tilde{\mathbf{f}}$ は圧力項と対流項から構成されており、(3-1)式の左辺は線形であるため、速度は圧力項から求める初期乱れ速度と対流項から求める初期乱れ速度の和で表される。前章で求めた \tilde{p}_1 の圧力項から求める初期乱れ速度を $\tilde{u}_{1p}(x, y)$ とすると、 $\tilde{u}_{1p}(x, y)$ は(4-1)式より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{u}_{1p} = \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{p}_1(x, y) \quad (4-3)$$

となる。(4-3)式は次式のように積分表示される¹⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1p}(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{\text{Re}}{4\pi\tau} e^{-\frac{\text{Re}(x-\xi)^2}{4\tau}} \left\{ e^{-\frac{\text{Re}(y+\eta)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{\text{Re}(y-\eta)^2}{4\tau}} \right\} \\ &\times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\tilde{p}_1 \Big|_{x=\xi, y=\eta} \right) \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4-4)$$

(3-17)式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{p}_{1c} &\cong \sum_{m=1}^{18} \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c1mk} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \cdot \frac{b_{c1p}}{\gamma_{1mk}} \cdot e^{-\frac{|y-\beta_{1m}|}{\gamma_{1mk}}} \\ &\times \left(\begin{aligned} &-c_{c1p} \sin \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \\ &- \text{sign}(y-\beta_{1m}) \left\{ 1 + c_{c1p} \cos \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \right\} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4-5)$$

ここで

$$\text{sign}(y - \beta_{1m}) \equiv \begin{cases} -1 & ; y < \beta_{1m} \\ 0 & ; y = \beta_{1m} \\ 1 & ; y > \beta_{1m} \end{cases}$$

したがって、(4-4)式は下記のようになる。

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{1p}(x, y) \\ & \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{18} \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c1mk} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \cdot \frac{b_{c1p}}{\gamma_{1mk}} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t d\xi d\eta \frac{\text{Re}}{4\pi\tau} e^{\frac{\text{Re}(x-\xi)^2}{4\tau}} \left\{ e^{\frac{\text{Re}(y+\eta)^2}{4\tau}} - e^{\frac{\text{Re}(y-\eta)^2}{4\tau}} \right\} \\ & \times e^{\frac{b_{c1p}|\eta-\beta_m|}{\gamma_{1mk}}} \left(\begin{array}{c} -c_{c1p} \sin \frac{b_{c1p}(\xi-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \\ -\text{sign}(\eta-\beta_m) \left\{ 1 + c_{c1p} \cos \frac{b_{c1p}(\xi-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \right\} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4-6)$$

(4-6)式の積分を解くために次の公式

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\text{Re}(x-\xi)^2}{4\tau}} \sin \frac{\xi}{\gamma} d\xi = \sqrt{\frac{4\pi\tau}{\text{Re}}} e^{-\frac{\tau}{\text{Re}\gamma^2}} \sin \frac{x}{\gamma} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\text{Re}(x-\xi)^2}{4\tau}} \cos \frac{\xi}{\gamma} d\xi = \sqrt{\frac{4\pi\tau}{\text{Re}}} e^{-\frac{\tau}{\text{Re}\gamma^2}} \cos \frac{x}{\gamma} \end{aligned} \quad (4-7)$$

を用いると、(4-5)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{1p}(x, y) \\ & \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{18} \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c1mk} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \frac{b_{c1p}}{\gamma_{1mk}} \int_0^t d\eta \\ & \times \sqrt{\frac{\text{Re}}{4\pi\tau}} \left\{ e^{\frac{\text{Re}(y+\eta)^2}{4\tau}} - e^{\frac{\text{Re}(y-\eta)^2}{4\tau}} \right\} e^{\frac{|\eta-\beta_m|}{\gamma_{1mk}}} \\ & \times \left(\begin{array}{c} -c_{c1p} e^{\frac{b_{c1p}^2 \cdot \tau}{\text{Re}\gamma_{1mk}^2}} \sin \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \\ -\text{sign}(\eta-\beta_m) \left\{ 1 + c_{c1p} e^{\frac{b_{c1p}^2 \cdot \tau}{\text{Re}\gamma_{1mk}^2}} \cos \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \right\} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4-8)$$

(4-8)式の積分を先ず時間に関して解くために、次の積分を利用する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{\frac{\text{Re}(y+\eta)^2}{4\tau}} - e^{\frac{\text{Re}(y-\eta)^2}{4\tau}} \right\} d\tau \\ & = -\text{Re}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (y + \eta - |y - \eta|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau}{\text{Re}\gamma^2}} \left\{ e^{\frac{\text{Re}(y+\eta)^2}{4\tau}} - e^{\frac{\text{Re}(y-\eta)^2}{4\tau}} \right\} d\tau \\ & = \text{Re}^{\frac{3}{2}} \gamma \sqrt{\pi} \left(e^{\frac{y+\eta}{\gamma}} - e^{\frac{|y-\eta|}{\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (4-9)$$

上式を用いると(4-8)式は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{1p}(x, y) \\ & \equiv \text{Re}^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{18} \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c1mk} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \int_0^{\infty} d\eta \cdot e^{\frac{b_{c1p}|\eta-\beta_m|}{\gamma_{1mk}}} \\ & \left(\begin{array}{c} \left(e^{\frac{b_{c1p}(y+\eta)}{\gamma_{1mk}}} - e^{\frac{b_{c1p}|y-\eta|}{\gamma_{1mk}}} \right) \sin \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \\ \times \text{sign}(\eta-\beta_m) \left\{ \frac{b_{c1p}}{\gamma_{1mk}} (y + \eta - |y - \eta|) \right. \\ \left. + \left(e^{\frac{b_{c1p}(y+\eta)}{\gamma_{1mk}}} - e^{\frac{b_{c1p}|y-\eta|}{\gamma_{1mk}}} \right) \cos \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \right\} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4-9)$$

(4-9)式を解くために、下記の関数を検討する。

$$\begin{aligned} I_{y10} & \equiv -\int_0^{\infty} \left(\frac{y+\eta}{\gamma} - \frac{|y-\eta|}{\gamma} \right) \text{sign}(\eta-\beta) e^{-\frac{|\eta-\beta|}{\gamma}} d\eta \\ I_{y20} & \equiv \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{y+\eta}{\gamma}} - e^{\frac{|y-\eta|}{\gamma}} \right) e^{-\frac{|\eta-\beta|}{\gamma}} d\eta \\ I_{y30} & \equiv \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{y+\eta}{\gamma}} - e^{\frac{|y-\eta|}{\gamma}} \right) \text{sign}(\eta-\beta) e^{-\frac{|\eta-\beta|}{\gamma}} d\eta \end{aligned} \quad (4-10)$$

(4-10)式は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} I_{y10} & = \int_0^{y_S} \left(\frac{y+\eta}{\gamma} - \frac{y-\eta}{\gamma} \right) e^{\frac{\eta-\beta}{\gamma}} d\eta - \int_{y_L}^{\infty} \left(\frac{y+\eta}{\gamma} + \frac{y-\eta}{\gamma} \right) e^{\frac{\eta-\beta}{\gamma}} d\eta \\ & + \int_{y_S}^{\beta} \left(\frac{y+\eta}{\gamma} + \frac{y-\eta}{\gamma} \right) e^{\frac{\eta-\beta}{\gamma}} d\eta - \int_{\beta}^{y_L} \left(\frac{y+\eta}{\gamma} - \frac{y-\eta}{\gamma} \right) e^{\frac{\eta-\beta}{\gamma}} d\eta \\ & = -2 \{ 1 + \text{sign}(y-\beta) \} \gamma + 2\gamma e^{-\frac{\beta}{\gamma}} + 2\gamma \cdot \text{sign}(y-\beta) e^{-\frac{|y-\beta|}{\gamma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{y20} &= \int_0^\beta e^{\frac{-y+\beta}{\gamma} d\eta} + \int_\beta^\infty e^{\frac{-y-\beta+2\eta}{\gamma} d\eta} - \int_0^{y_S} e^{\frac{-y+\beta-2\eta}{\gamma} d\eta} \\
 &\quad - \int_{y_L}^\infty e^{\frac{-y-\beta+2\eta}{\gamma} d\eta} - \int_{y_S}^{y_L} e^{\frac{-y-\beta}{\gamma} \text{sign}(y-\beta)} d\eta \\
 &= (\gamma + \beta) e^{\frac{-y+\beta}{\gamma}} - (\gamma + |y-\beta|) e^{\frac{|y-\beta|}{\gamma}} \\
 I_{y30} &= -\beta e^{\frac{-y+\beta}{\gamma}} - (y-\beta) e^{\frac{|y-\beta|}{\gamma}} \quad (4-11)
 \end{aligned}$$

(4-11)式は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} I_{y10}(y, \beta, \gamma) \\ I_{y20}(y, \beta, \gamma) \\ I_{y30}(y, \beta, \gamma) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2\gamma \left[1 + \text{sign}(y-\beta) - e^{\frac{\beta}{\gamma}} \right] & 0 & 2\gamma \cdot \text{sign}(y-\beta) \\ 0 & \gamma + \beta & -\gamma - |y-\beta| \\ 0 & -\beta & -(y-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{-y+\beta}{\gamma}} \\ e^{\frac{|y-\beta|}{\gamma}} \end{pmatrix} \quad (4-12)
 \end{aligned}$$

(4-10)式を用いて(4-8)式を書き直すと、次式ようになる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{1p}(x, y) &\cong \text{Re}^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c1mk} \sum_{p=1}^7 a_{c1p} \\
 &\times \begin{pmatrix} I_{y20} \left(y, \beta_{1m}, \frac{\gamma_{1mk}}{b_{c1p}} \right) \sin \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \\ I_{y10} \left(y, \beta_{1m}, \frac{\gamma_{1mk}}{b_{c1p}} \right) + I_{y30} \left(y, \beta_{1m}, \frac{\gamma_{1mk}}{b_{c1p}} \right) \cos \frac{b_{c1p}(x-d_{1mp})}{\gamma_{1mk}} \end{pmatrix} \quad (4-13)
 \end{aligned}$$

(4-13)式を用いて得られる \tilde{u}_{1p} の x 方向成分 \tilde{u}_{1p} を定量的に求めることが可能となる。更に、実際の実験データとの比較は x 方向の乱れ圧力の二乗平均の平方根を求めることにより、定量的に有効性の検証ができる。

同様に壁近傍の境界層では次式が成立する。

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \tilde{v}_{2p}(y, z) \\ \tilde{w}_{2p}(y, z) \end{pmatrix} \\
 &\cong \text{Re}^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^7 \tilde{p}_{c2nk} \sum_{p=1}^7 a_{c2p} \\
 &\times \begin{pmatrix} I_{y10}(y, \beta_{2n}, \gamma_{2nk}) + I_{y30}(y, \beta_{2n}, \gamma_{2nk}) \cos \frac{b_{c2p}(z-d_{2np})}{\gamma_{2nk}} \\ I_{y20}(y, \beta_{2n}, \gamma_{2nk}) \sin \frac{b_{c2p}(z-d_{2np})}{\gamma_{2nk}} \end{pmatrix} \quad (4-14)
 \end{aligned}$$

本解析は乱れ速度に関して乱流モデルや乱れ速度強さを与えず、渦の概略配置のみしか仮定していないが、乱れ速度の初期値を求める方式が得られたことは意味あることと考えられる。

圧力項を外力として初期乱れ速度が求められたため、その速度を用いて対流項の計算が可能となる。この対流項を外力とした初期乱れ速度を計算するための定式化は容易に可能となる。この定式および検証は今後扱うことにする。

5. 初期渦構造圧力及び初期乱れ速度分布の解析解

圧力に関するポアソン方程式の外力項を平均速度分布から関数の形で求め、この関数を複素関数表示し、それを積分することにより乱れ圧力の解析解が得られ、三角関数と指数関数の代数式で与えることができた。

乱れ速度に関しては、ナビエ・ストークス方程式の慣性項と粘性項を纏めて線形偏微分方程式の形をとり、対流項と圧力項を纏めて上記方程式の外力項のように扱うことにより、線形偏微分方程式と非線形外力の連立式を収束計算により乱れ速度を求める方法を本稿では選択している。この線形偏微分方程式の特性である核の関数は既に求められているので³⁾、外力にこの核関数を掛けて積分することにより速度が計算できる。偏微分方程式は線形の形を取っているため、外力項が複数であれば、その数に対応する乱れ速度が生成される。そこで前述の初期乱れ圧力から求める初期乱れ速度を圧力項を外力とした初期乱れ速度と名付け、3章において初期乱れ圧力と同様な比較的簡単な代数式で与えた。同様に、この圧力項を外力とした初期乱れ速度と平均速度から対流項を求め、対流項外力を関数表示することにより、対流項外力初期乱れ速度を求める代数式を4章において導いている。

この初期乱れ圧力の値は、今後の具体的な計算結果により評価されるものであるが、オーダー・チェックの段階では DNS 数値実験結果²⁾の値の高々2~3倍以内の範囲に収まっており、妥当と思われる値を示しており、且つ、これまで不自然な過程はでてきていない。同様に初期乱れ圧力を外力とした初期乱れ速度に関しては、実際の計測値のオーダーに近く、現時

点では不自然な境界条件, スペクトル, 分布ならびに滑らかさ等とは出てきていない。本計算手法は従来実験結果からしか与えられない初期乱れ速度を平均速度分布だけから求める方法である。圧力に関するポアソン方程式で乱れ速度より複雑な様相を示す乱れ圧力を先ず求め, それを少し滑らかにするフィルターを通して乱れ速度を求めている。

本方式はナビエ・ストークス方程式の差分型直接解法²⁾で, 実現象のとして定着してきている解釈, すなわち, 平均速度分布からエネルギーをもらい, 乱れ圧力が生成され, その乱れを減衰するように乱れ速度が惹き起こされているという方式に従っている。乱れ圧力と乱れ速度の相互影響は平均速度分布による乱れ圧力の影響に比較し, エネルギー的には小さいと推定でき, また平均速度分布は乱れ速度の影響を含め, 実験における収束解を求めている。したがって本方式の初期乱れ圧力, 初期乱れ速度分布の計算方式は, 乱流境界層計算において常に有意であり, 今後, 差分方式の入口での乱れ速度分布を与える上でも有効になると考えられる。

6. 結言

流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式を連立積分方程式の形式で表し, 各々の積分方程式を直接解き, 連立条件を満足するような繰り返し計算により収束解を求め, 流体现象を解明することを本研究の目的としている。本研究では, 平板乱流境界層を対象とし^{1), 2)}, 上記繰り返し計算の最初にあたる初期乱れ圧力および初期乱れ速度の計算式を導いた。これら計算式は平均速度分布を, ある決められた条件を満足する適当な関数で与えることにより積分の形ではなく, 三角関数と指数関数の代数式で与えることができた。

本解析方法では平均速度分布から乱れ圧力分布を生成し, その乱れ圧力分布から乱れ速度分布を発生させる過程にしたがい, 初期乱れ圧力分布, 初期乱れ速度分布を計算する式を導いている。

本研究は発展してきた大規模な数値流体計算を解析的に裏付け, 流れの特性をより明確にする上で, 今後有用になるばかりでなく, 複雑な流れも簡便なパソコンで処理できる可能性を示しており, 計算の簡易化にも役立つことが期待される。

謝辞

本研究を行うにあたり, 千葉科学大学危機管理学部 木村太郎君, ジャナカ ウブル クマーラ君, 山木さやかさんに多大なご助力をいただきました。感謝いたします。

7. 参考文献

- 1) 田中厚成; 積分型直接シミュレーション解法による乱流境界層の研究 (第1報) (初期乱れ圧力分布解析式の構築) 防衛庁技術研究本部技報 第6814号, (2002.12)
- 2) S.K.Robinson; The Kinematics of Turbulent Boundary Layer Structure, NASA TM103859, (1991.4)
- 3) 田中厚成; ナビエ・ストークス方程式直接シミュレーションの積分解法について, 防衛庁技術研究本部技報, 第6632号, (1997.2)
- 4) デュッチェ, フェルカ; 2次元ラプラス変換の理論と応用, 法政大学出版局, (1968)
- 5) S.K.Robinson; A Review of Vortex Structures and Associated Coherent Motions in Turbulent Boundary Layers, Second IUTAM Symposium on Structure of Turbulence and Drag Reduction, (1989.7)
- 6) P.R.Sparlart; Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to $Re_\theta = 1410$, J. of Fluid Mech., Vol. 187, (1988)
- 7) J. Mulis, H. M. Tsai, P. Bradshaw; The Structure of turbulent boundary layers at low Reynolds Number, J. of Fluid Mech., Vol. 122, (1982)
- 8) S.J.Kline; Research, Invention, Innovation and Production: Model and Reality, Report INN-ID, Stanford Univ.(1985.2)

表3-1 渦構造近似式の係数

P	1	2	3	4	5	6	7
a_{c1p}	-0.64	7.12	-40.92	87.25	-72.22	16.62	2.67
b_{c1p}	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{11\pi}{20}$	$\frac{13\pi}{20}$
c_{c1p}	-0.418	0.034	-0.005	0.0018	-0.0016	0.0046	0.0192

表3-2 $\beta_{21m}, \beta_{22n}, \gamma_{21m}, \gamma_{22n}$

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
β_{21m}	12	25	35	50	65	80	100	120	145	170	200	230
γ_{21m}	10	12	14	16	18	20	22	25	30	35	41	47
β_{22n}	5	10	20	30	40	60	80	100	130			
γ_{22n}	5.5	9	15	19	23	33	41	45	48			

表3-3 $c_{21mk} \cdot \frac{2 \gamma_{21mk}}{\ell}, c_{22nk} \cdot \frac{2 \gamma_{22nk}}{\ell} (\times 10^{-4})$

		$c_{21mk} \cdot 2 \gamma_{21mk} / \ell (\times 10^{-4})$						
k	m, β	1	2	3	4	5	6	7
1	12	-5.11	158.70	-630.68	1098.10	-963.78	370.52	-27.76
2	25	-4.20	134.03	-563.73	1008.70	-883.31	334.59	-26.10
3	35	-3.45	63.49	-343.58	669.21	-551.88	190.64	-24.45
4	50	-2.24	43.61	-249.38	498.99	-417.78	145.49	-19.30
5	65	-1.46	29.17	-171.84	352.36	-302.31	109.33	-15.24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	360	-0.27	7.13	-56.07	142.50	-152.25	73.02	-14.24
16	410	-0.28	7.38	-58.90	151.78	-164.90	80.93	-16.21
17	470	-0.39	8.20	-66.47	173.09	-190.21	94.79	-19.34
18	540	-0.34	8.54	-70.35	185.16	-205.99	104.45	-21.83
		$c_{22nk} \cdot 2 \gamma_{22nk} / L_x (\times 10^{-4})$						
k	n, β	1	2	3	4	5	6	7
1	5	-0.004	-0.205	2.233	-6.122	6.605	-3.063	0.557
2	10	-0.004	-0.261	2.942	-8.380	9.420	-4.626	0.909
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	80	-0.132	-0.085	12.613	-49.266	67.442	-40.192	9.656
8	100	-0.142	-0.051	13.294	-52.793	73.132	-44.169	10.773
9	130	-0.162	-0.058	15.125	-60.067	83.208	-50.255	12.258

表3-4 外力関数の係数 $d_{1m0}, d_{2n0} (\times 10^8)$

m	β_{21m}	d_{1m0}	m	β_{1m}	d_{1m0}	n	β_{2n}	d_{2n0}
1	12	- 0.0147	10	170	- 0.0242	1	5	- 0.2808
2	25	- 0.4002	11	200	- 0.5770	2	10	- 2.0044
3	35	- 0.4217	12	230	- 0.3708	3	20	- 3.6602
4	50	- 0.7550	13	270	- 0.1525	4	30	- 1.2994
5	65	- 0.7964	14	310	- 0.072	5	40	- 1.7122
6	80	- 1.3050	15	360	- 0.0375	6	60	- 1.4781
7	100	- 1.5178	16	410	- 0.0194	7	80	- 0.5425
8	120	- 0.1396	17	470	0.0	8	100	- 0.4326
9	145	- 1.3077	18	540	0.0	9	130	- 0.3848

表3-5 渦構造圧力のピーク値 \tilde{p}_{m1mk}

		$c_{1mk} \cdot c_{z1mk}$						
m, β	k	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0.384	- 9.430	33.633	- 52.850	42.073	- 14.738	0.928
2	25	- 0.509	7.777	- 32.749	55.220	- 41.682	13.260	- 1.318
3	35	0.486	- 6.964	32.009	- 55.558	41.087	- 12.395	1.337
4	50	- 0.395	5.785	- 27.556	48.615	- 36.132	10.872	- 1.192
5	65	0.118	- 1.720	8.281	- 14.782	11.139	- 3.426	0.390
6	80	0.223	- 3.329	16.069	- 28.944	22.171	- 6.994	0.806
7	100	0.309	- 4.569	22.297	- 40.631	31.542	- 10.156	1.213
8	120	0.264	- 3.946	19.761	- 36.297	28.443	- 9.345	1.128
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	470	0.0011	- 0.013	0.068	- 0.134	0.116	- 0.044	0.006
18	540	0.0004	- 0.005	0.026	- 0.051	0.044	- 0.017	0.003

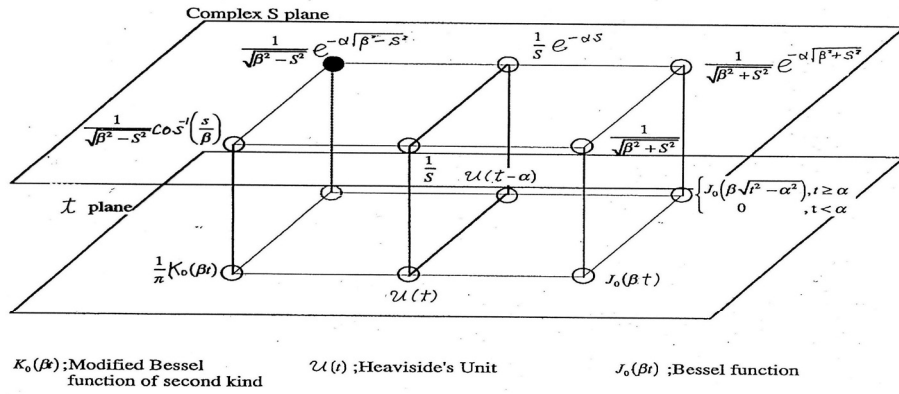


図 2-1 ラプラス変換の例

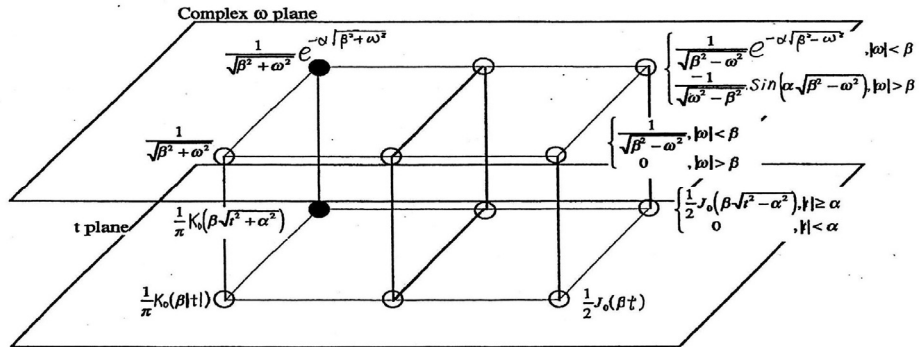


図 2-2 フーリエ変換の例

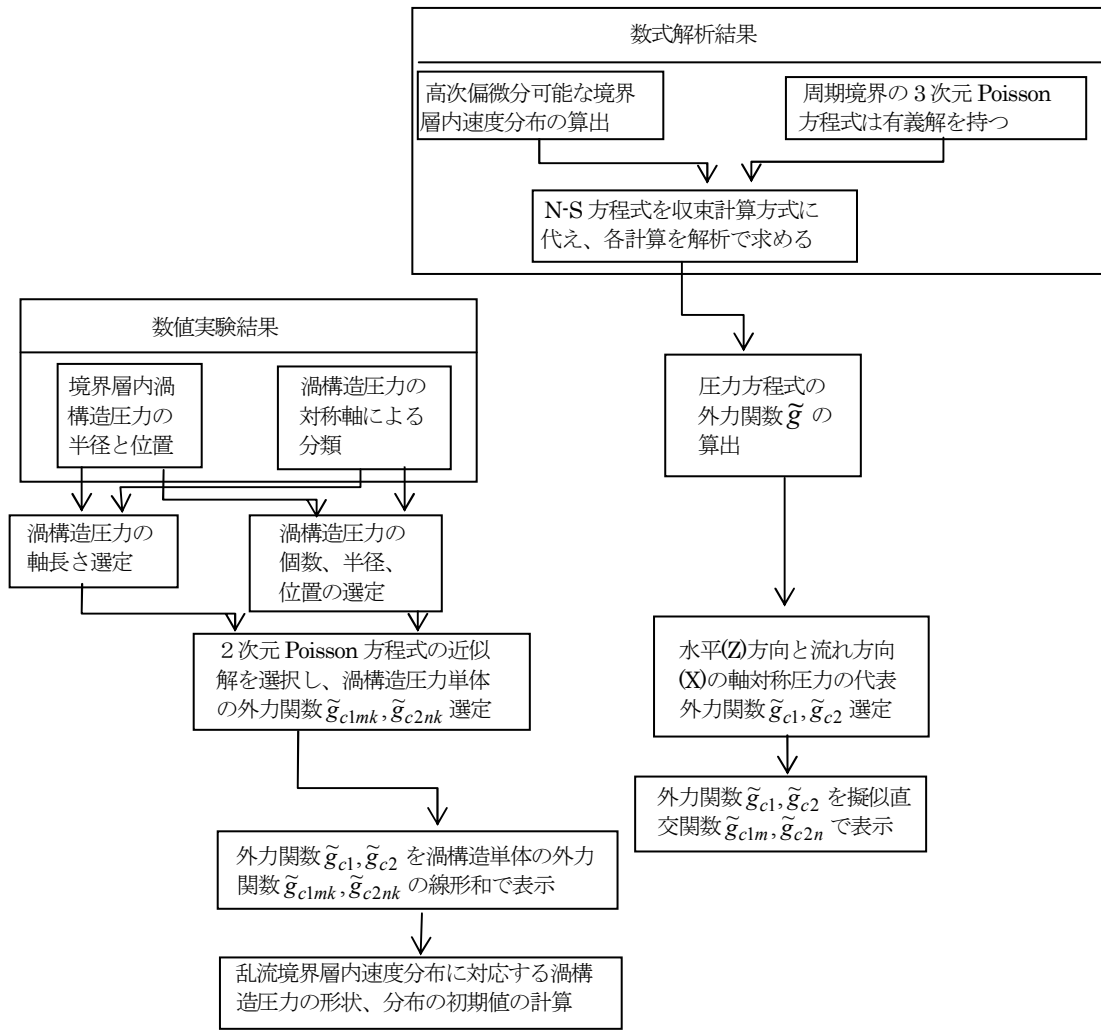


図3-1 初期乱れ圧力分布の計算フロー

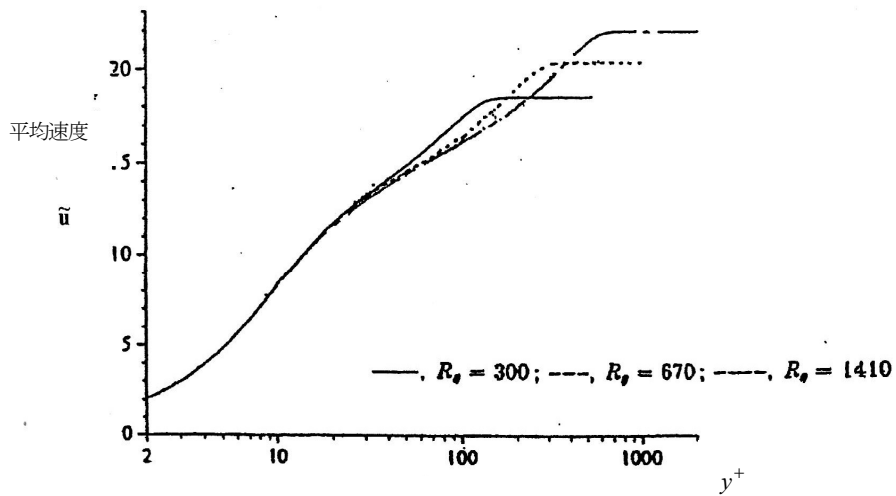


図3-2 境界層内平均速度分布

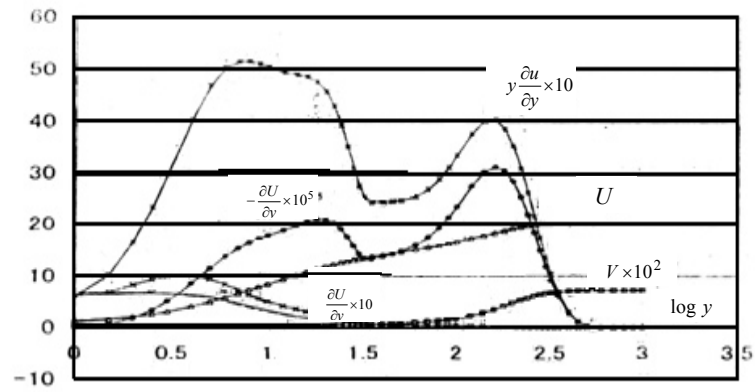


図 3-3 境界層内の速度勾配

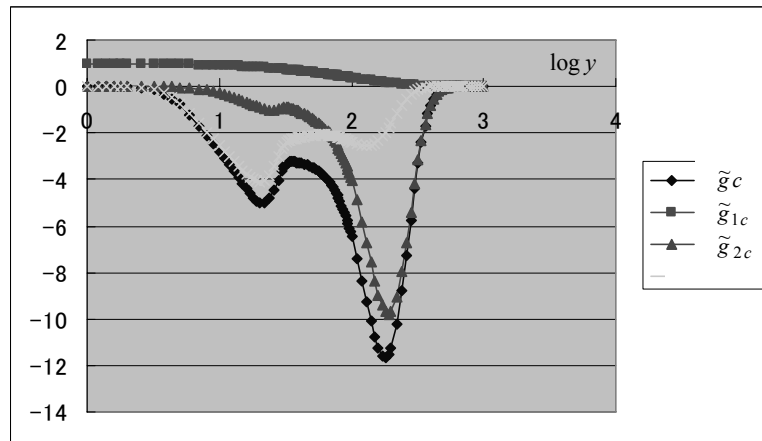


図 3-4 外力関数 \tilde{g}_c , \tilde{g}_{1c} , \tilde{g}_{2c}

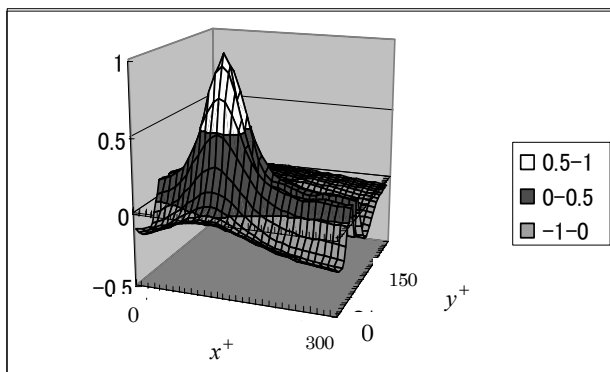


図 3-5 2次元正規分布の近似関数

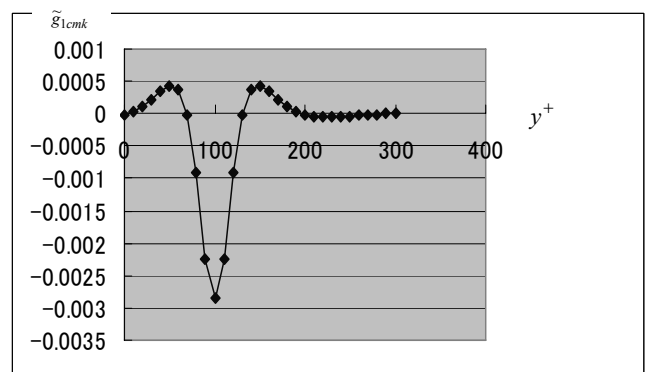


図 3-6 \tilde{g}_{1cmk} の形状

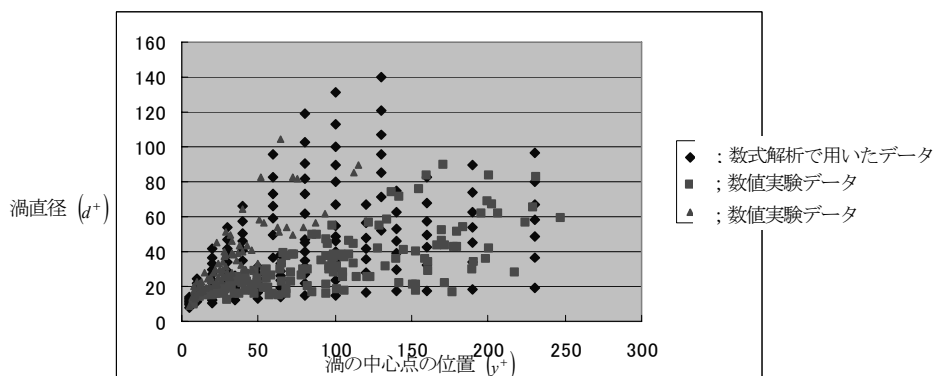


図 3-7 x 方向に軸を持つ渦構造直径と y 方向位置

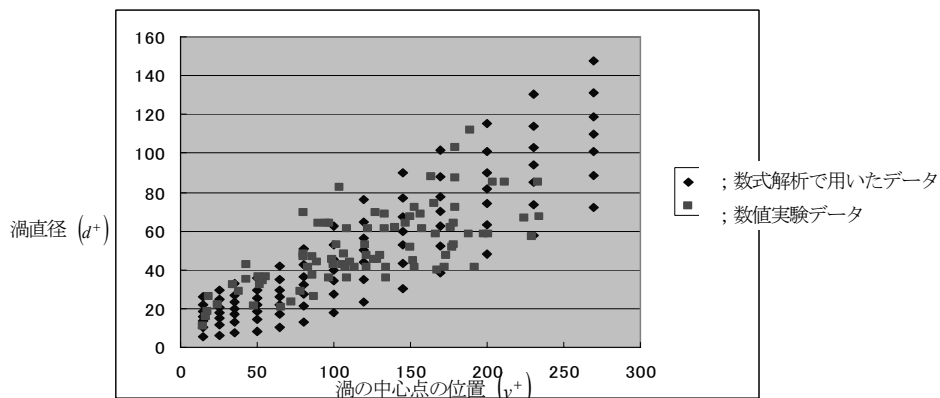


図 3-8 z 方向に軸を持つ渦構造直径と y 方向位置

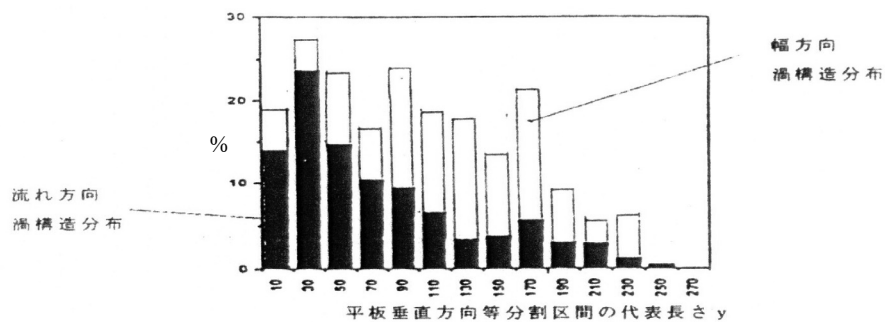


図 3-9 y 方向位置に含まれる渦構造の分布²⁾

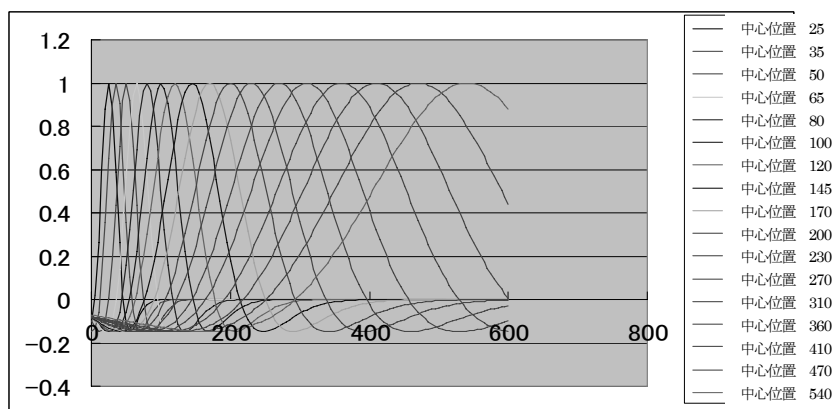


図 3-10 近似外力関数 g_{clm}

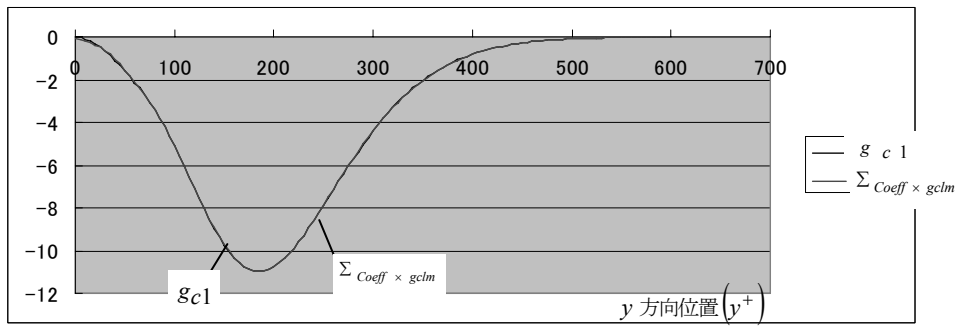


図 3-11 外力 g_{cl} と g_{clm} を用いた近似

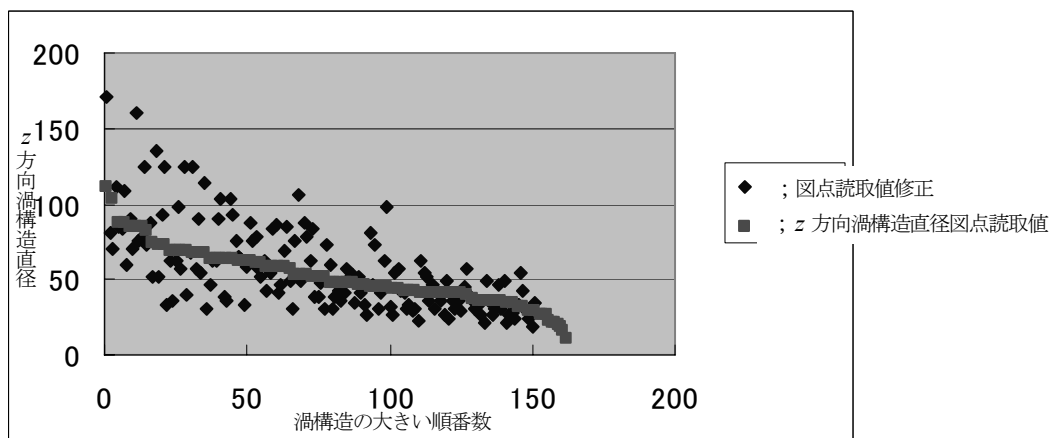


図 3-12 z 方向軸の渦構造の大きい順番号と直径の読取値の比較

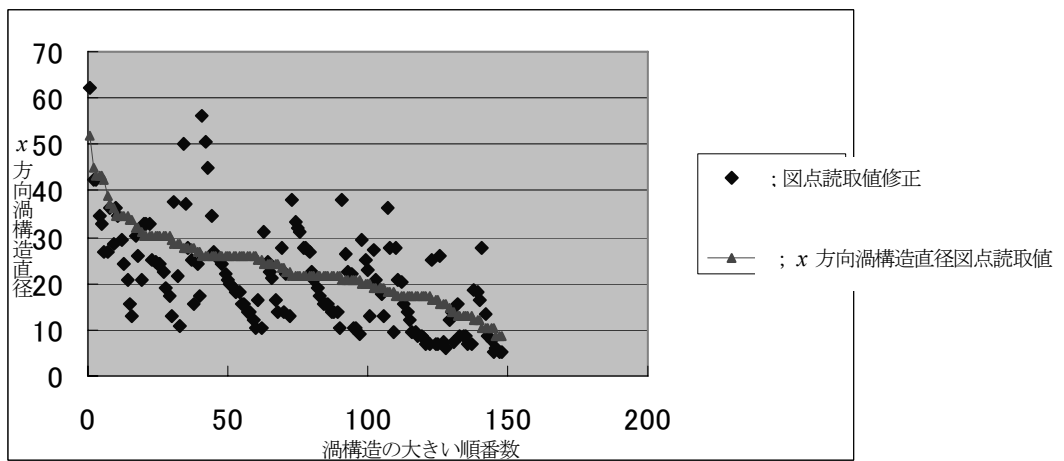


図 3-13 x 方向軸の渦構造の大きい順番号と直径の読取値の比較

On the Analytical Solution for the Vortex Structured Pressure of Turbulent Boundary Layer(Part1)

—Analytical Solution of Initial Vortex Structured Pressure and Fluctuating Velocity—

Atsushige TANAKA, Hanae SEI and Ryota SONE

Department of Disaster System Science, Faculty of Risk and crisis Management, Chiba Institute of Science

The object is to express the turbulent characteristics of turbulent boundary layer as vortex structured pressure and fluctuating turbulent velocities by solving analytically Navier—Stokes equation and Poisson equation. The method is mainly based on the way to solve the above 3-dimensional linearized equations and nonlinear force terms by using functional analysis and 3-dimensional convergent procedure. 3-dimensional Poisson equation is insolvable generally, but we can provide here the sufficient solutions under the periodic boundary conditions which are often adopted implicitly on wind tunnel tests and numerical simulation of fluid dynamics. The solution is able to express analytically and quantitatively the vortex structured pressure and fluctuating turbulent velocities of turbulent boundary layer.

This method is expected to show more explicitly the kinematics of turbulent boundary layer structure and to make a precious role of the development of fluid dynamics, and is expected to be used for the complicated kinematics of turbulent flow with conventional small personal computer by using the above analytical results.