千葉科学大学紀要．14．87-106．2021
【報告】

多様化した社会におけるデータサイエンスを意識した数理教育のあり方

On education of mathematics to learn data science in a diversifying society

船倉 武夫[f)]，　森　園子[m)]，　齋藤 伸之[s)]，　岡林 徹[o)]

Takeo FUNAKURA，　Sonoko MORI，　Nobuyuki SAITOU，

and Tohru Okabayashi

多様化した社会が数学教育に望まれているものは，数学のための数学教育ではなく，社会のための数学教育が求められている。例えば，掛け算 73×82 を筆算する場合，2×3，2×7，8×3，8×7 の順番で下位から上位へ九九を適用して，小学校で繰り返し習う。しかし中学校で多項式の積 $(7x+3)(8x+2)$ では上位から下位へ順番を変えて展開する。幾何の公理を遵守したユークリッド幾何学が発展したが，平行線の公理を外して，非ユークリッド幾何学が誕生したように，一旦，決めた規則を遵守することも大事であるが，数学は考え方の自由が保証されている。同様に数学教育も自由化，特に，複線化が求められている現状を事例研究する。

Ⅰ．　はじめに

急激な技術革新と，消費者ニーズの変容が相まって，製品が市場に投入されてから，成長，成熟，衰退までの製品ライフサイクルの期間が短命化している。過去の大量生産は，個々のスキルに影響されずに品質の均一化を図れば，さらにコストの低減が見込むことができた。

多品種少量生産は，価値観の複雑化，ライフスタイルの変遷と言った，顧客のニーズを的確に把握でき，注文に応じられるスキルがあれば，メリットを享受できる。それがうまくいかないと，品質のばらつき，コストの上昇というデメリットがある。

グローバリゼーションが「多様化する社会」のキーワードである。ビッグデータは，人の行動，気象，医療，遺伝，物流などさまざまな分野で得られるようになっている。さらに，データを組み合わせ新たなデータが日々生まれてきている。ビッグデータから有用な価値を引きだす学問がデータサイエンスである。

2018 年 12 月４日，日本経済団体連合会は，「今後の採用と大学教育に関する提案」をした。その第１番目に掲げたのが，文系・理系の枠を越えた基礎的リテラシー教育の充実である。

狩猟社会（Society 1.0），農耕社会（Society 2.0），工業社会（Society 3.0），情報社会（Society 4.0）に続く，多様な価値観が融合する Society 5.0 時代を生き抜く人材へ，従来から求められてきた教養，読解力，表現力，論理性に加えて，ビッグデータやＡＩなどを使いこなす情報・数学・統計の基礎知識が明記された。その上で，大学へ，文系・理系の枠を越え情報科学や数学，歴史，哲学などの基礎科目を必修とするべきだと提言している。ここで求められている数学教育は，学問としての数学を継承するためではなく，社会の基盤となるためであることを軽視してはならない。この観点で数学教育への期待は多大である。

データサイエンスの技術的な基礎は，統計学と情報学である。さらにそれらの基礎は数学であることに異論を挟む者はいないであろう。参考文献として，須江[1)]，櫻井[2)]に加えて，片桐[3)]を挙げておく。

連絡先：
f) 船倉武夫 tfunakura@cis.ac.jp　千葉科学大学・危機管理学部・航空危機管理学科・教授 *Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science*
m) 森園子　拓殖大学・政経学部・教授
s) 齋藤伸之　千葉科学大学・学習支援センター・職員
o) 岡林徹 千葉科学大学・危機管理学部・保健医療学科・講師
（2020 年 9 月 30 日受付，2021 年 1 月 7 日受理）

Ⅱ．初年次教育（数学）の顧客ニーズ

高校までの学校数学と，大学の専門科目以降で扱われる数学とは，数式記号を含めていろいろ異質なところが多々あり，学生たちを困惑させてきたことは，巷間，指摘されている通りである。筆者の勤務大学も例外ではない。教科書の選書に始まり，教育内容や教育方法が学生たちのニーズとは合わず，試行錯誤してきた。

定評がある数学書の多くは，理工系の数学の目標である微分積分を頂点として，論理的に系統立てられて記述されている。小学校から高校まで，一定の水準で網羅的に学習をしていることが前提となっている。ところで，大学では理解度が 60%以上で単位取得ができるのである。言い換えれば，理解できないことが 40%近くあっても合格できるのである。算数・数学は 10 年間必修であっても，最後の２年間は選択（学習しないことも含めて）である。このため，新入学生たちに対して，数学力を一定水準，網羅的な学習経験を前提とできないのである。オフィスアワーや学習支援センターでの個別指導，さらに，補習授業や再試験を行うなど対応してきたが，手間暇がかかる割に，成果が上がらないのも事実である。

一方で，アンケート調査や対面の聞き取りで，学生は将来の進路を見据えて多種多様なニーズを持っていることが分かっている。学生たちの満足度を向上させる数学教育は，いわゆる“理系”として構築された教育内容や教育方法ではなかったのである。むしろ“文系”で求められている数学教育との類似性が高いのである。

このような問題意識をもって，千葉科学大学の筆者らは日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究（C）「人文･社会系学部におけるデータ分析を機軸とした数理的教育の構築」研究代表：森園子，課題番号:17K00983 に参画（分担・協力）してきた。

Ⅲ．数学教育のアナログ性

実用において，小学校の算数から高校の数学までの学習指導要領が取り扱っている学習内容で事足りているであろうか？今まで通りの教授法で大丈夫だろうか？心の中でときどき思い起こしながら，日々の数学講義は黒板にチョークで数式を手描きするのが，ふつうのスタイルであった。

板書した箇所を指して，数式を読み上げるのではなく，「これをあれに代入して･･･，このような図になり･･･」といった代名詞や指示名詞ばかりで説明していた。そもそも，数式の読み方がキチンと決まっていないからである。漢字の筆順のようには，数式の書き方が決まっていない。

例えば，分数 $\frac{2}{3}$ は３分の２のように下から上に書いて読むのに対して，微分商 $\frac{dy}{dx}$ では，上から dy 下へ dx と読むのが，数学の業界の慣習である。この読み方に関して，教科書にはどこにも書いていない。留学生向けの科学技術の教科書[4]には

$$\frac{1}{1+x^2}$$

を「１プラス x の２乗分の１と読め」とあるが，

$$1+\frac{1}{x^2}$$

と識別ができない。要するに，数学はデジタル社会を支えてると主張しながら，数学の教科書は，音声入力・テキスト読み上げ機能を安易に使えないのである。

中学・高校・大学入試を通じて，筆算が重視されてきていて，関数電卓，関数グラフ作成アプリ，及び表計算ソフトを使うことが稀である。このため，それぞれの数式の仕様が異なっていても数学教員は無関心であった。

これらが象徴するように，学校数学の教育現場はデジタル社会とは対極のアナログ社会に安住していたのだ。

Ⅳ．コロナ禍の数学教育

コロナ禍で，数学の講義も例外なく，リモート遠隔授業やらなくてはならなくなった。

手間暇をいとわなければ，手書きでも，数式エディタでも，それなりの伝統的な数式を学生たちに提示することは可能である。しかし学生に問題演習をさせようとすると，大きな障害が現れてくる。

例えば，学生が $\sqrt{2}$ を解答しようとしたとき，どうすればよいのだろうか。標準化ができていない。

情報処理の観点では，半角と全角が混在していると，入力が面倒であるばかりか，環境依存文字が使われる可能性があるので，望ましくない。そうすると

√（2），√2，√(2)，√2

は不正解とせざるを得ないが，数学の答えとみれば，$\sqrt{2}$ の形に出来るだけ似せるように努力しているのだから，正解にしたくなる。この誘惑に負けると，文字入力において，上付き添え字 $2^{0.5}$，$2^{1/2}$ を認めることになり，収拾がつかない。情報端末がＰＣ・スマホ・タブレットと多種多様なので，文字化けの危険性が高まる。

解決策として，

半角の行（ライン）入力のみに限定

としかない。ただし，2^0.5，2^1/2 は表計算ソフト Excel で可だが，数式エディター（LaTex）は不可であるため，数式入力の統一性と汎用性を考えて，括弧（ ）を使うように決めると，

2^(0.5)，2^(1/2)，SQRT(2)，sqrt(2)

のみが正解に絞り込まれる。

もちろん，記述式を諦め，解答を四者択一や五者択一

にすれば，たちまちすべて解決する。しかしその瞬間，数学が数学らしさをすっかり失ってしまう。

個人的体験を述懐したが，数学教育が一般社会からかけ離れ，隔絶された環境下で，独自の進化を遂げたガラパゴス化の一景とみて，過言でなかろう。

V．理科教育としての数学教育

歴史を振りかえれば，日本において近代の数学教育は明治の学制以降，学校教育の主要教科として，確固として位置づけられてきた。「理科教育振興法」（1953（昭28)年）は　――名称から理科であり，数学は関係ないと，即断しないで欲しい――　次のように規定されている。

第１条（目的）

・・・理科教育が文化的な国家の建設の基盤として特に重要な使命を有することにかんがみ・・・、理科教育を通じて、科学的な知識、技能及び態度を習得させるとともに、工夫創造の能力を養い、もつて日常生活を合理的に営み、且つ、わが国の発展に貢献しうる有為な国民を育成するため、理科教育の振興を図る・・・。

第２条（定義）

・・・「理科教育」とは、小学校・・・、中学校・・・、高等学校・・・において行われる理科、算数及び数学に関する教育・・・。

現在，数学教育が直面している問題点・課題点を解決するために，きわめて先見性があふれた法律である。

同根にも拘わらず，数学教師と理科教師には大きな違いがあることを指摘したい。

理科教師の大多数は，実験という教育活動があるので，教科書「を」教えても，教科書通りに実験結果が出ないため，自然の摂理を教科書「で」教えることを自ずと身につけている。

これに比べて，数学は，実験がなかったため，中学・高校・大学入試問題を念頭にしながら，教科書「を」教えることに終始しがちである。数理の摂理を教科書「で」教えることをしていない。自らの仕事（教育活動）が社会に多大に役立つことをほとんど意識せず，局所化・矮小化しているように感じられる。教科書「を」教えて授業を済ませている数学教員に再考を迫りたい。数学こそ教科書「で」教えておかないと，悪い影響（副作用・副反応）が後で出てくる教科はほかにない。

数学の学習者は，数学は人生に役に立たないと感じがちである。数学は便利なツールである。数学がないと，就活や国試の対策にはじまり，仕事・業務ができない分野は多岐にあることを，数学教師は伝えるべきである。しかし，なぜできないのか，それは，教科書「を」教えることに終始し，教科書「で」数学の本質を伝える時間を作らなかったからであろう。

Ⅵ．医療系で求められる数学教育の実用的な意義

千葉科学大学で国家試験受験資格の取得可能な医療系国家資格（2020 年度）は次の通りである。

表１．国家資格

薬剤師	薬学科（薬学部）
看護師	看護学科（看護学部）
臨床検査技師	保健医療学科（危機管理学部）
臨床工学技士	
救急救命士	

１．薬剤師の場合

薬剤師養成が 4 年制であったときは，高校数学をしかるべく学んでいれば事足りる，大学で新たに学ぶものはないと数学系の科目の開講はなかった。しかるに，薬剤師養成が 6 年制に移行する際に，「基礎数学」春学期 1 コマ 2 単位が新設された。薬学教育モデル・コアカリキュラムー薬学準備教育ガイドラインを踏まえ，他科目との重複を精査し，シラバスの骨子は次の通りである。

到達目的は，薬学を学ぶ上で基礎となる数学に関する基本的知識を修得し，それらを薬学領域で応用するための基本的技能を身につけることである。

① 数値の扱い
1. 大きな数や小さな数を 国際単位系 SI 接頭語，べき及び対数を使い，的確に表せる。
2. 有効数字の概念（丸め・四捨五入の仕組み）を説明し，近似計算が筆算とともに関数電卓を活用できる。誤差・相対誤差を理解する。
3. 示された割合を基に，基準量と比較量の関係（百分率等）を捉えられる。

② 種々の関数
1. 関数の合成・逆関数を理解し，PC アプリを活用し，作図し，読み取り・説明ができる。
2. 指数関数及び対数関数の性質を理解し，数式及びグラフを用いて読み取り・説明ができる。

③ 微分と積分
1. 極限の基本概念を概説できる。
2. 導関数の基本概念（相対微分商）を理解し，代表的な関数の微分計算ができる。
3. 微分積分法の基本定理を理解し，代表的な関数の不定積分および定積分ができる。
4. 簡単な微分方程式の成り立ちを理解できる。

薬学系の数学入門書[5]では，指数・対数が極めて重視されている。殊に，対数微分・対数積分の理解が不可欠である。多項式関数は比例関係の１次関数が中心で，２次関数どまりで高次関数はほとんど扱われない。分数関数は反比例関係が中心であり，１次分数が主である。無理関数は平方根が多用されるが，これに比べて，立方根

は Hixon-Crowell の立方根法則だけだ。グラフを多用しているのに，増減表や凹凸表を扱っていない。

最大の特徴は三角関数が全く扱われていないことにある。化合物が混合して，化学変化が周期的に起こることは，ほぼ例外的であるため，薬剤師の国家試験にほとんど出題されないからである。

2015 年，鹿児島県知事の発言と対比すると興味深い。ジェンダーの問題としてマスコミで喧伝され，発言の一部撤回した議事録[6]は現在非公開なので，当該箇所を引用しておく。

> 高等学校になると、いろんな人生の問題、いろんな人生の分野があるので、そこは、もう少し均一的な教育の仕組みを変えた方が良いのかなという気もしている。「サイン・コサイン・タンジェントはいらない」と従来から言っている。「社会に出て、サイン・コサイン・タンジェントを使ったことがあるか」と聞いたら、十分の九は「使ったことはありません」とおっしゃる。高校教育で、サイン・コサイン・タンジェントを教えて何になるのかなと。それよりも、もう少し社会の事象とか、植物の花とか、草の名前とか覚えさせた方が、教えた方がいいのかなというのがある。

2. 臨床工学技士の場合

「工学」技士というように，エンジニアリングの知識が広く求められて，医療業界では「いのちのエンジニア」，「白衣のエンジニア」と呼ばれることもある。

2020 年，新型コロナウイルス Covid-19 のパンデミック（世界的な流行・蔓延）が起きているが，重症化した患者の治療過程で用いる，いわゆるＥＣＭＯ（エクモ）（Extra Corporeal Membrane Oxygenation; 体外式膜型人工肺）を操作する役割を主体的に担った医療従事者として，広く知られるようになった。臨床工学技士は，「医療系において，取り分け応用数学，情報処理工学，システム工学などの数理教育が高度に必要とされている国家資格」である。その実際の業務は血液透析・ＩＣＵ・医療危機管理室等，きわめて多岐にわたる。その国家資格試験を見ると，数理系分野は出題割合の約 35%を占める。養成課程においても，卒業後の臨床現場においても，数理的技能は欠かすことができない。国家試験の試験範囲は 9 つの分野に分けられている

表 2. 臨床工学技士国家試験出題基準

専門基礎科目	医学概論
	医用電気電子工学
	医用機械工学
	生体物性材料工学
専門科目	生体機能代行装置学
	医用治療機器学
	生体計測装置学
	医用機器安全管理学
	臨床医学総論

臨床工学技士国家試験は全 180 問を，午前と午後に 90 問を 2 時間 30 分ずつに分け，計 5 時間をかけて解くことになっている。1 問あたりにかけられる解答時間はわずか 1 分 40 秒である。合格基準は 60%（108 点）以上である。

3. 危機管理で求められる数学

千葉科学大学危機管理学部は，発足時すべての学科名称に“システム” (防災システム学科，環境システム学科，危機管理システム学科) がつき，工学の色が濃かったため，文理融合として，数学系科目は「微分積分」「線形代数」の講義が中心だった。その後の学科の新設・統廃合を経て，公務員コースや医療系学科の新設があったため，教授内容を精査し講義の一部を演習にし，春学期「基礎数学」「基礎数学演習」，秋学期「実用数学」「実用数学演習」と，科目名も改称して現在に至っている。

公務員コースとは，公務員全般を指すが，危機管理学部とあるように，消防士（救急救命士も含まれる）・警察官・自衛官などを進路先とする学生が多い。

それを自己実現するためには公務員試験に合格しなくてはならない。その教養試験は自治体によって異なるが，おおむね“知識分野”と“知能分野”が 50%ずつ出題されている。さらに“知能分野”は“数的処理”と“文章理解”に大分される。

「数的処理は苦手」という学生が多い。学校で数学を教わっていても，それを具体的な場面において，推理や判断に応用する学習をしていないためであろう。

表 3. 数的処理

数的推理	速さや濃度など比や割合（百分率），順列・組合せ，平面図形を扱う問題 ※「みはじ」からの脱却→定式化・方程式
判断推理	命題と論理や暗号・対応関係など，条件を整理し推測する問題 ※離散数学・集合・論理回路を含む
空間把握	立体図形や展開図，図形を転がすなど空間認識能力を問う問題 ※勾配，動径や軌道も含む
資料解釈	グラフや図表などの数値データを使って計算し解釈する問題 ※近似・概数・記述統計・表計算等を含む

公務員試験の教養試験に対応するものとして，民間会社の就職試験ではＳＰＩ（Synthetic Personality Inventory）が多く採用されている。言語問題と非言語問題がセットである。非言語問題として，次のような算数や数学の問題が出題されている。

1. 推論，順列，組合せ，確率，集合
2. 割合と比（百分率）
3. 損益算，料金割引，代金清算（方程式・不等式）
4. 仕事算，速度算，濃度算

ＳＰＩ（非言語）と公務員の数的処理とは，範囲は異なるが算数や数学の分野である点で類似している。人はコミュニケーションで受け取る情報は，相手から発せられる「言語情報」以外にも「聴覚情報」や「視覚情報」を受け取っている。数学は字面を追うだけでなく，図解したり，表にまとめないと理解できないという観点で見れば，非言語なのである。

一般的に設問文は文字量が多く，不要な過多の情報が混在して記載されている。しかし解答に掛けられる時間が平均的に1問当たり約1分しかない。このため，「問題がすぐには解けなくても粘り強く考え続け・・・」と学習指導[7](p.7)されるのとは全く相反する。数的処理やＳＰＩ（非言語）ではすぐに解けない場合は飛ばして，次の問題へ移れという受験テクニックが幅を利かせている。就職試験で，よく使われる内田クレペリン精神検査では，達成数や正答数だけでなく，誤答数や誤答率が勘案されていることと同様に「誤答は正答の得点から減点，無答は減点しない」という採点方式がとられているとの思い込みも背景にある。

なお，医療系における危機管理では，分からないことを答えてはならない。間違えたら致命的であり，正しさに自信がもてないことを当てずっぽうに答える選択はありえない。この観点で，分からないものは飛ばし，分かる問題に取り組み解答することに価値がある。

4. 「みはじ」からの脱却

ときどき学生の数学の答案に，円を描き 3 分割して「み」「は」「じ」と書いてある符号を見掛けるようになってきたのは 10 年ぐらい前からである。学生から聞き取りした「みはじ」の使用法を紹介しておく。

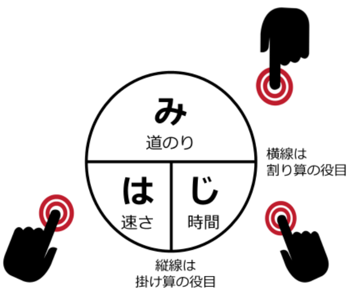


図 1. みはじ（きはじ）

速さを求めたいときは「は」の字を指で隠して

「は」速さ＝「み」 ÷ 「じ」

と読み取る。時間を求めたいときは「じ」を隠して

「じ」時間＝「み」 ÷ 「は」

と読み取る。道のりを求めたいときは「み」を隠して

「み」道のり＝「は」 × 「じ」

と読み取る。道のりを距離と覚えた場合は，「きはじ」となる。「みはじ」は，その意味には関心がなく，正答を得ることが大事なのである。また，「比べられる量」，「もとにする量」,「割合」の関係を覚えるのにも使われ，頭文字をとって「くもわ」と呼ばれる。このような暗記型数学の学習は，数理教育を妨げる元凶であり，リメディアルが必要である。松川[8]も参考になる。

小学生や中学生の頃，塾で習ったとの証言が多かったから，日本だけ独自なのかと筆者らは思い込んでいた。しかし今回，改めて調べ直したら，「数学図鑑」[9](p.29)（アメリカで出版された数学啓蒙書）に，円と三角形と図形は異なるが，同趣向が記載されていた（図 2)。

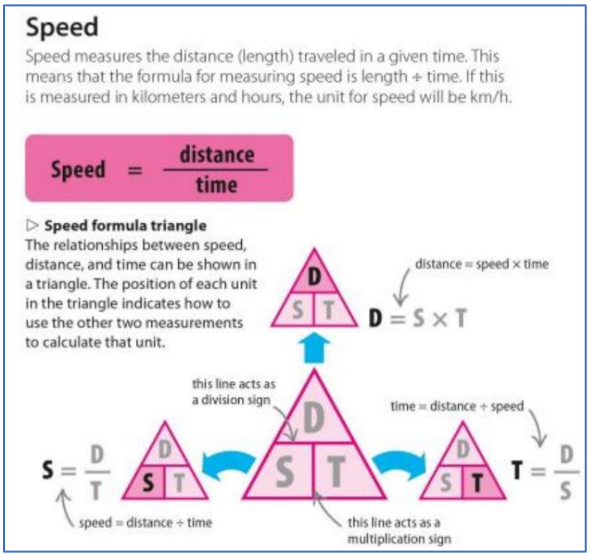


図 2. 速さ公式の三角形

5. 看護師に求められる数学

「大学における看護系人材養成の在り方に関する検討会」では，看護学教育モデル・コア・カリキュラムが提示され，根拠に基づいた看護を実践するための基礎・疫学と保健統計を学び，“できる”が求められている。

1. 人口統計，疾病構造，保健・医療・福祉に関する基本的統計や指標について説明
2. 健康障害と相対リスクについて説明
3. 疫学的因果関係の推定について説明
4. 情報リテラシーについて説明
5. 統計資料をデータベース・文献等から検索活用

総務省統計局「統計学習の指導のために」先生向けサイト http://www.stat.go.jp/teacher/model.html "ナイチンゲールと統計"（国立国会図書館 WARP に保存）で紹介している通り，看護学にとって，統計は欠かせない。ほとんどの数値計算処理は，高校までの数学の学習範囲である。ここで，補習指導を行なったとき，一部の学生が混乱した国試の過去問を一つ紹介しておく。

例題１．（第 106 回 看護師国家試験）
体重 9.6 kg の患児に，小児用輸液セットを用いて体重 1 kg 当たり 1 日 100 mL の輸液を行う。このときの 1 分間の滴下数を求めよ。ただし，小数点以下の数値が得られた場合には，小数点以下第 1 位を四捨五入すること。

解答　40 滴/分。

ふつう，速さは数値が大きくなればなるほど速く，小さければ小さいほど遅い。一方，点滴滴下数は，小児用は 60 滴/mL，一般用は 20 滴/mL と表示されている。つまり，数値が大きいほど体内の流入はゆっくり，小さいほど体内への流入は速い。比例・反比例を理解している者にとっては自明であっても，「みはじ」で処理してきた者は大混乱，60 を掛けず，割ってしまうのである。

6.　百分率と四捨五入

文部科学省設置計画履行状況等調査の結果等が公開されている。2014（平 26）年，千葉科学大学の初年次教育に対して，次のような是正意見が付された。

> 「英語Ⅰ」「基礎数学」など大学教育水準とは見受けられない授業科目があることから，大学教育の質の担保の観点から，適切な内容に修正するか，または正規授業外でのリメディアル教育で補完すること。

これをマスコミは，「基礎数学はレベルが低い。百分率や四捨五入などの単語に目を疑ってしまう。ちなみに百分率は小学校 5 年，四捨五入にいたっては小学校 4 年の単元だ。"数学"ではなく"算数"なのである」と報じた。

しかしながら数学教育の担当者へ抗弁する機会は全く与えられることがなかった。「四捨五入」や「百分率」は，大学で扱うべきものでない，小学校で十分に学んでいる思い込みがこの履行調査の報道には感じられる。さらにそれに追随する多数のＳＮＳが拡散していった。

ところで，芳沢[10]は「%が分からない」と大学生を指摘しているが，分からぬと自覚せぬまま社会へ出て，% に対する無理解があらゆるレベルではびこっている。

例えば，コロナ禍における人出の減少率のデータが繰り返し報道されている。本論を執筆中，2020 年 9 月 12 日の内閣府の資料では次のように発表している。

表 4. コロナ感染者の増減（発表）誤用例

エリア	対感染拡大前比	対緊急事態宣言前比	対前日比	対前年同月比
新宿駅	−38.5%	0.6%	−10.0%	−41.2%
東京駅	−42.6%	10.8%	−0.4%	−44.7%
渋谷駅	−34.8%	36.8%	2.6%	−33.6%

百分率にマイナスの符号がつけていている点に違和感がある。百分率の差はパーセントを使わず，ポイントで表すべきである。しかも項目名に"比"を用いている。比と差は異なる。百分率とは，英語では parts per hundred という通り，基準量を 100 として，それに対する割合を表す方法である。本来は 100 当たりの個数であるが，0.1%単位で表されることが多い。これは"SI 単位系"が 3 桁区切りであるが，千分率（‰パーミル）に馴染みがないためだろう。

表 5. コロナ感染者の増減（修正版）正用例

エリア	対感染拡大前比	対緊急事態宣言前比	対前日比	対前年同月比
新宿駅	61.5%	100.6%	90.0%	58.8%
東京駅	57.4%	110.8%	99.6%	55.3%
渋谷駅	65.2%	136.8%	102.6%	66.4%

Ⅶ.　数学教育の陶冶的な意義

大学の共通教養は，専門科目とは異なり，特定の事例に際立って見られるさまを分析解明する事例研究や，臨床・現場ですぐに役に立つ即戦力の涵養ではない。特殊性の強調ではなく，普遍性に立脚すべきであろう。そして，普遍は陶冶によって教育されるものである。

陶冶の原義は，陶芸の押し型や鍛冶屋の鋳造・冶金をつくるとき，木型・金型・砂型を利用したことに由来する言葉である。すなわち，効率よく理想形に合わせて製造する意味である。転用して，人間のもって生まれた素質や能力を理想的な姿・期待される人間像にまで形成する教育用語として使われるようになった。さて，陶冶は，2 種類に大分される。

- 実質陶冶　具体的な教材（提供される文化，科学，技術など）の習得そのものを重視する
- 形式陶冶　人間のもっている能力（記憶力，推理力，判断力など）の涵養を重視する

1.　学習指導要領（高校数学）

解説書[7]には次のようにある。

> ・・・数学の学習を通して、<u>将来の学習や生活に数学を積極的に活用できる (a)</u> ようにするとともに、<u>知的好奇心、豊かな感性、想像力、直観力、洞察力、論理的な思考力、批判的な思考力、粘り強く考え抜く力などの創造性の基礎を養う (b)</u> ことも重要であ

る。例えば、・・・粘り強く考え続け、問題が解けたとき得られる喜びは大きな自信につながる。その自信が新たな問題に向かう意欲を育てることになるのである。問題がすぐには解けなくても粘り強く考え続けることで、いくつかの知識の理解が深まることや新たな事実を発見することもあり得るだろう。

下線部 (a) で数学教育の実質陶冶を述べ, 下線部 (b) で数学教育の形式陶冶を述べている。数学教育の陶冶的な意義に関する賛否は歴史 [11)12)] から学べる。

2. 形式陶冶の有意性

数学教育の陶冶を強く支持する代表格は芥川 [13)]「文芸家たらんとする諸君に与ふ」である。

文藝家たらんとする中學生、須らく數學を學ぶ事勤勉なるべし。然らずんばその頭脳常に理路を辿ること迂にして、到底一人前の文藝家にならざるものと覺悟せよ。文藝家たらんとする中學生は、須らく体操を學ぶ事勤勉なるべし。然らずんばその躰格常に薄弱にして、到底生涯の大業を成就せざると覺悟せよ。文藝家たらんとする中學生は、須らく國語作文等を學ぶに冷淡なるべし。これらの科目に冷淡にして、しかもこれらの科目に通曉し得る人物にあらずんば、到底半人前の文藝家にさへならざるものと覺悟せよ。

數學の出来ず、躰操の嫌いなるを以て、反って己の文藝的天分の豐かなるかの如く自惚るるものは元より、國語の点數多く作文の甲ばかりなるを以て、一かどの天才の如く考ふるものは、自家の愚を天下に広告すると共に、併せて文藝の大道を冒瀆するものと云はざる可からず。こは予自身の経験に基く言にして、予亦然く中學時代を有効に経過せざりしを悲しみつつあるものなり。一言文藝家たらんとする諸君に告ぐる事斯くの如し。

中学生を大学生と直して, このまま贈りたい言葉である。

3. 形式陶冶の問題点 [14)]

仲本 [15)] は, 形式陶冶の問題点を指摘している。

・・・そんな算術を習って何に役立つのであろうか。ずいぶん難しい算術を習っておきながら、ほとんど役に立たないではないか、とこれに共鳴するものがだんだんと多くなってくるのは当然である。また実際においても算術教育に対する大なる非難が起こったのである。しかしながら、この非難に対する唯一の弁解たる形式陶冶の思想が、一般の人々の簡に、行き渡ったために、古い時代の算術が変わるべくして、最近までもほとんど変化を見なかったのである。

ところで, 引用した学習指導要領の下線部(a), (b)の主張は, 考え続けるならばの前提条件が満たす割合はどのぐらいなのか？また, その条件を満たしたら, どのぐらいの確率で理解が深まり, どのぐらいの確率で発見ができると見積もっているのか？「もあり得る」と極めてあいまいである。

中島 [16)] の序章では「算術でむずかしい問題を与えて訓練することが, どんな生活場面においても有効に働く精密な思考力の養成になる」と解説し, また, 片桐 [3)] では, 「形式陶冶主義のいうところは, 能力心理学の主張に基づいて, ある領域で訓練した能力, 思考が他の領域にも転移する。その訓練領域としては, 数学と古語が最適で, これらの科目で訓練した能力・思考が他の領域, 学問の学習に転移するという前提に立つものである。そして, そこでの訓練の対象は, 数学そのものを教えればよいというものである」とある。

ここで, 教わった側の発言を聞いてみよう。菊池 [17)] は次のように述べている。

私は一生を振り返ってみて中學で教はった學科のうち、數學だけは何の役にも立っていない。ことに代數や幾何は一度も役に立ったことがない。道を歩くとき、三角形の二辺の和は他の一辺より大であるといふ定理 (c) が少し役に立った程度である。代數なんか全部忘れた。しかし、忘れたために不便を感じたことはない。どうしてあんなもののために時間を費やしたのかと思ふ。代數や幾何で數理的觀念を養ふためといふ建て前であるかもしれないが、そういふことは単なる理屈であって、算術で養はれる數理觀念で沢山なのだ。

菊池は, 下線部(c)を直観的に当たり前つまらないと感じたのだろう。しかし, この定理はユークリッド幾何の基本定理であり, 多くの応用を導く (XI参照)。

4. 三浦朱門の真意

教育課程審議会（1996～1998）三浦朱門会長が「二次方程式の解の公式」を消し「円周率が３にした」, そして, 日本人の数学的解決能力を欠如させた「ゆとり教育」の元凶だと, 指弾（例えば上野 [18)]）されてきたが, そのフェイク性を検証するため, 三浦 [19)]「もっと面白くて数学が好きになる学び方がある」を抜粋引用する。

・・・統計、確率・・・は、法学部や経済学部などの社会科学と縁の深い学部に進む者にとって必須の知識であり、それはまた高校の数学で言えば、解析などとはあまり関係のない・・・ほとんど独立した数学の分野である。・・・数学にはこのように、さまざまな切り口がある。

それなのに、従来の数学は一本道でありすぎた。ひたすら工学的な計算の道具になりうる数学しか教えない。三角関数とか対数とか、時々、闇の中か

ら出てきたようなテーマが出てくるが、対数は指数関数の関連で扱われるが、それが発生した本来の意味はほぼ完全に教科書では無視されている。・・・数学のさまざまな切り口のどれか１つでも関心を持てれば、そこから数学に入ることができるし、必要と関心の形によっては、そこから探究が始まるし、知識の蓄積が行われる。

とにかく数学の歴史や発展は決して一本道ではなかった。それなのに、それを単純明快な、そして一度、落ちこぼれると、二度と回復できないような体系にしてしまったことに、いろいろな問題がありそうに思われる。

今までの数学の教科書がいけない、と言っている訳ではない。それもいい。しかし数学の教科書や、数学の学び方は、それ以外にもいろいろとあることを強調したい。今までの数学のテキストは、人類文化数千年の数学の歴史のうちの、今日の技術や物理･化学の勉強を大学でするのに必要なものを選び出して、それを簡潔に要領よくまとめている。という印象を消し難い。

それが多くの数学に関心をもちうる人たちを、この科目から遠ざけているように思える。

・・・数学なんて数学的に処理できる分野にしか役に立たない。かといって、私たちの生活の中で、数学的に考えると、いろいろと興味深かったり、明快になったりすることがある。数学に限ったことではないが、われわれは専門家のトリックに欺かれてはならないのである。・・・

数学は物理や化学、そして時に生物に役立つだけではない。社会科の歴史にも地理にも応用すれば、新しい地平を開いてくれることであろう。それをしなかったのは、教育関係者の怠惰と先入観のおかげであろう。

三浦の指摘は正鵠を得ている。「２次方程式もろくに出来ないけれど, 全然不自由しなかったという委員を半分以上加えて，数学教育の内容を見直す必要」との三浦の主張[19)20)]には，解析学を頂点とした富士山型教育体系では，登頂失敗，挫折体験，数学嫌い，それが自らの体験を合理化のため数学無用論に至る, 負の連鎖を断ち切るには，各人が知力体力に合った数学が楽しめる，いわば“百名山”化を目指そうというのが，真意であろう。

Ⅷ. 日本語と数学

日本では，寺子屋で読み書きソロバンを習っていて，庶民ですら, かわら版を買って読んでいたばかりでなく，掛け算九九を諳んじることができたのである。

例えば，四六時中という言葉があるが，掛け算の九九 $4 \times 6 = 24$ だから, 24時間の意味である。1872(明５) 年，24 時間制採用されて以降にできた言葉である。それ以前は，二六時中と言っていた。$2 \times 6 = 12$ すなわち，一日が十二刻だったことに由来していた。また，予想通りいかず見込みが外れることを「三五の十八」と井原西鶴は浮世草子で表現しているが、江戸中期の読者が $3 \times 5 = 15$を知ってたからこそ成り立つのである。

難しい問題に直面して，手も足もできず「にっちもさっちもいかない」という。漢字で書くと「二進も三進も行かない」。これは珠算の割り算の用語であり，二進は 2 で割り切れる意味，三進は 3 で割り切れる意味である。つまり，2 でも 3 でも割れなくて，困ったことを表現しているのであり, 割り算の用語が庶民の日常会話でも通じたのである。

掛け算や割り算もできたのだから, 和算を洋算に変更しても何も問題が起こらなかったと言えるのだろうか。

1. 一倍は何倍か

和算では，0 の概念がなくa があって，それに a を n 個加えたものを，n 倍と考えていた。つまり

$$a + (a + \cdots + a) = (1 + n)a$$

である。「一倍」に関連する言葉を，国語辞典を調べてみると，次のような語釈がある。

【死に一倍】　親が死んで遺産が入ったら，元金を２倍にして返すと約束して借金すること

【人一倍】　普通の人に比べて２人分やること

【焙烙の一倍】焙烙は割れやすいので，初めからそのことを計算に入れて, 元値に対して売価を２倍にすること

要するに，日本語では１倍にすることを 2 倍にすることを意味していたのである。江戸時代の寺子屋で算術（ソロバン）を学んでいた庶民にとって，

一倍は $a + a = 2a$

二倍は $a + a + a = 3a$

だったのである。

明治維新になり開国すると，西洋との貿易・交流が増え，多くの問題が生じたと想像するに難くない。

1872（明 5）年の学制発布において，数学教育として洋算（西洋数学）の採用が決まった。文部省布達（第 13 号別冊第 27 章下等小学教科）では

算術　九々数位加減乗除　但洋法ヲ用フ

と規定している。ところで，1873（明 6）年，小学教則改正において

算術（サンヨウ）　洋法ヲ主トス

と修正され，1874（明 7）文部省布達第 10 号 で

小学教科中洋算相用候共日本算相用候共其校適宜ニ取計不苦候此旨更ニ布達候事

※ 意訳：洋算か日本算か学校が選択して構わない。

このように，洋算一辺倒が無理と判断しているのに，1875 (明 8) 年，太政官布告第 183 号を出した (図 3)。

自今公文中總テ計算上一倍ノ稱呼ヲ止メ從前ノ諸規則等ニ一倍ト記載有之分ハ二倍ト改正候條此旨布告候事　但譬バ原金高一圓ノ二倍ハ二圓十倍ハ十圓ト計算候儀ト可心得候事

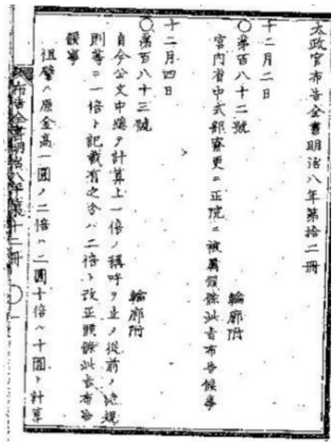

太政官布告全書明治八年第拾二冊
十二月二日
○第百八十二號　輪廓附
宮内省中式部寮更ニ正院ニ被屬候條此旨布告候事
十二月四日
○第百八十三號　輪廓附
自今公文中總テ計算上一倍ノ稱呼ヲ止メ從前ノ諸規則等ニ一倍ト記載有之分ハ二倍ト改正候條此旨布告候事
但譬ハ原金高一圓ノ二倍ハ二圓十倍ハ十圓ト計算

図 3.　一倍についての取り扱い（国立国会図書館）

数学教育の現場では，「与えられた数量 a の n 倍とは， a を n 回加えるのだから

$$a + \cdots + a = n \cdot a$$

と書くのだ」と説明することがよくある。しかし何も無い所に，突然，a が表れてくる。まさに，珠算における「ご破算に願いまして・・・」を追従している。

加法における単位元ゼロ 0 が先ずあり，$+a$ という足し算を n 回繰り返す

$$0 + a + \cdots + a = n \cdot a$$

と解釈すると，統一感がでてくる。

$$0 = 0a$$
$$0 + a = 1a = a$$
$$0 + a + a = 2a$$

2.　２乗を何と読むか

$$a^2$$

は a の平方とも読むが，「にじょう／じじょう」の二通りの読み方をすることが多い。「二」の音読みは，学習漢字の音は「に」のみである。二男・二女は次男・次女から転じたが，二乗が次乗とふつうは書かない。さて，「じじょう」は自乗と書く。すなわち，前節の加法に関する考察は，乗法にも適用できる。

珠算における掛け算では，ご破算にして，a が入れられて，それに a 自身を乗ずる意味で「自乗」である。

$$a \times a = a^2$$

「代微積拾級訳解」[21]に洋算と和算の用語の対比がまとめられている （図 4） 。

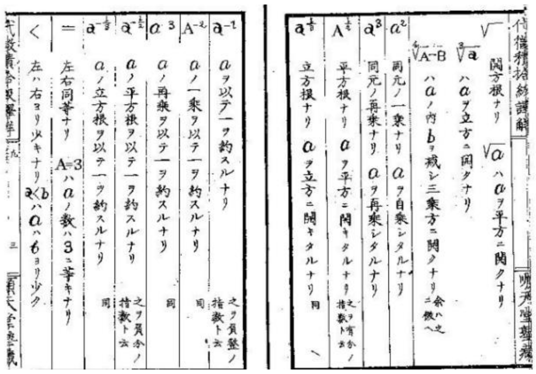

√ 開方根ナリ　$\sqrt{a}$ ハ a ヲ平方ニ開クナリ　$\sqrt[3]{a}$ ハ a ヲ立方ニ開クナリ　$\sqrt[4]{A-B}$ ハ a ノ内 b ヲ減シ三乗方ニ開クナリ 余ハ之ニ傚ヘ
a^2 同元ノ一乗ナリ a ヲ自乗シタルナリ
a^3 同元ノ再乗ナリ a ヲ再乗シタルナリ
$A^{\frac{1}{2}}$ 平方根ナリ a ヲ平方ニ開キタルナリ 之ヲ有分ノ指数ト云
$a^{\frac{1}{3}}$ 立方根ナリ a ヲ立方ニ開キタルナリ 同
a^{-1} a ヲ以テ一ヲ約スルナリ 之ヲ負整ノ指数ト云
A^{-2} a ノ一乗ヲ以テ一ヲ約スルナリ 同
a^{-3} a ノ再乗ヲ以テ一ヲ約スルナリ 同
$a^{-\frac{1}{2}}$ a ノ平方根ヲ以テ一ヲ約スルナリ 之ヲ負分ノ指数ト云
$a^{-\frac{1}{3}}$ a ノ立方根ヲ以テ一ヲ約スルナリ 同
= 左右同等ナリ A=3 ハ a ノ数ハ3ニ等キナリ
< 左ハ右ヨリ少キナリ $a<b$ ハ a ハ b ヨリ少ク

図 4.　一乗の意味（国立国会図書館）

a^2　を「同元ノ一乗ナリ a ヲ自乗シタルナリ」

a^3　を「同元ノ再乗ナリ a ヲ再乗シタルナリ」と書いてある。洋算の n 乗を和算の $(n-1)$乗と言っていたのである。

数学の教育現場では

$$a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

と板書しながら，「a を n 個あるので n 乗だ」と，つい説明しがちである。ところで，ときどき

$$a^0 = 0$$

と間違える学生に出合う。どうやら，a を掛けないから 0 であると考えているようである。

乗法は，初めに乗法の単位元 1 があって，a を n 回乗じるから，すなわち，

$$a^n = 1 \times a \times \cdots \times a$$

と理解しておけば，間違えるわけはないのである。

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = 1 \times a = a$$

となり，統一感をもって理解しやすくなる。

3.　ゼロ 0 と日本語

留学生を招いた国際交流協会で抽選イベントを企画したことがある。このとき抽選券を例えば 4 桁の通し番号だとするとき，

2003　ニセンサン
2030　ニセンサンジュウ
2300　ニセンサンビャク

0 があると，日本人でも，聞き間違えやすい，まして，外国人にとって聞き分けは困難であろうと議論になったことがあった。

母国語を日本語としない外国人に対して，“0”の読み方を合理的に説明することが難しい。

漢字「零」を漢和辞典で引けば，常用漢字としては

音読み　レイ（漢音）
訓読み　（無し）

そして，常用漢字表外で，zero の当て字として，びっくりするが，ゼロが訓読みとして区分されているのである。

さて，カウントアップ 0→1→…→9→10，カウントダウン 10→9→…→1→0 をなんと音読しているか，発音の揺れをメモしてから，以下を読み進んで欲しい。。

ＮＨＫ（ことばのハンドブック p.331）は，数詞の基準となる発音を次のように定めている。

0［レ＼ー］ 1［イチ＼］ 2［ニ＼］ 3［サン￣］
4［ヨ＼ン］ 5［ゴ＼］ 6［ロク＼］ 7［ナ＼ナ］
8［ハチ＼］ 9［キュ＼ー］ 10［ジュ＼ー］

ただし，「無い」を強調する場合や，固有の読みが決まっている場合は［ゼロ］を使うと定められている。

また，自衛隊や海上保安庁等では，指示，報告などで数字を間違いなく伝えるため，旧日本軍からの伝統的な呼び方が使われている。

0 まる 1 ひと 2 ふた 3 さん 4 よん
5 ご 6 ろく 7 なな 8 はち 9 きゅう

これに従えば

2003 フタマルマルサン
2030 フタマルサンマル
2300 フタサンマルマル

となる。ただし，ひと・ふたはあまり使われず，

2003 ニーマルマルサン
2030 ニーマルサンマル
2300 ニーサンマルマル

とする場合も多い。

同じ趣旨で，0 を「飛び」と呼ぶこともあるが，マルとは異なり，末尾の 0 は読まない。

2003 ニセントビトビサン
2030 ニセントビサンジュー
2300 ニセンサンビャク

小数の読み方は，より複雑である。

◆ 小数 0.1 の読み方
 ① レーテンイチ （ＮＨＫルール）
 ② ゼロテンイチ （まれ）
 ③ コンマイチ

◆ 小数 0.01 の読み方
 ① レーテンレーイチ （ＮＨＫルール）
 ② レーテンレイイチ （レイと強調発音）
 ③ レーテンゼロイチ （日本語教科書[4]）
 ④ ゼロテンレーイチ
 ⑤ ゼロテンゼロイチ
 ⑥ コンマレイイチ （レイを強調）
 ⑦ コンマゼロイチ

◆ 有効数字の小数 0.10 の読み方
 ① レーテンイチレー （ＮＨＫルール）
 ② レーテンイチレイ
 ③ レーテンイチゼロ （有効数字の強調）
 ④ コンマイチゼロ
 ⑤ コンマイチレイ

4. 数値表現と日本語

説得力のある文章において，きちんとした数値データを用いた説明が不可欠である。文中の数値表現は，文章の流れを妨げないように読みやすさを重視すると同時に，理解しやすくなくてはならない。

“工業標準化法”が令和元年７月１日に“産業標準化法”に改正された。日本工業規格（JIS）が日本産業規格（JIS）になった。そして JIS の対象範囲が，モノからデータ，サービス，経営管理まで拡大された。自由に放置すれば，多様化・複雑化・無秩序化してしまうモノやコトについて，技術文書として「規格」を制定し「統一」「単純化」を図る目的である。その基盤が数値表現である。国際単位系（SI）[22]において，小数点はコンマ（.）またはカンマ（,）のどちらかを使うこと，また，混用してはならないことになっている。どちらを選ぶかは，言語の習慣や関連する状況によるとされている。

SI も JIS も，大きい数値に読み易さのために３桁ごとに空白を空けてもよいが，この空白に点（.）やカンマ（,）は挿入してはいけないと禁止している。また，両者の混用は厳禁である。Excel は大きな整数に対してカンマ（,）が挿入できるが，小数点との混用していないようになっている。

もともと，日本語の数詞は万・億・兆の如く，４桁ごとで区切る読み方であるが，その一方で，「公用文の書き方」[23]において，桁の区切りについては，三桁ごとにコンマ（,）を用いると定められている。

これらを軟着陸させる折衷案として，漢数字と算用数字を混用している。

ある市の人口 57255 人を表現するとき

A) 57255 人（算数・数学のルール）
B) 57 255 人（JIS や ISO のルール）
C) 57,255 人（公用文のルール）
D) 5 万 7255 人
E) 5 万 7 255 人（ほとんど見かけない）
F) 5 万 7,255 人（テレビ等で多用）

概数で表記するときも

G) 5 万 7 千人
H) 5.7 万人
I) 57 千人（千人を単位）

など，たくさんの書き方がある。

日本語として数値の表現・読み方はどれがなじむか，その上で，正確な情報が伝達できるか，数学教育で扱うべきテーマであろう。だが，多くの数学書では３桁ごとの空白もカンマ(,)の区切りにも無頓着である[5][24]。

科学定数（大数・小数）の表記例を幾つか示す。

光速 c

$2.997\ 924\ 58 \times 10^{8}$ m/s
2.997 924 58. E+8 m/s（Excel の指数表示）

299 792 458 m/s
299. 792 458 Mm/s
2 億 9979 万 2458 m/s
アボガドロ定数 N_A
6.022 140 79 × 10^{23} mol^{-1}
6.022 140 79. E+23 mol^{-1}（Excel の指数表示）
602.221 4079 Z mol^{-1}
602 214 079 000 000 000 000 000 mol^{-1}
6022 垓 1407 京 9000 兆 mol^{-1}
円周率 π
3.141 592 653 589 793 238 462 643
3 点 1 分 4 厘 1 毛 5 糸 9 忽 2 微 6 繊 5 沙
ネイピア数 e
2.718 281 828 459 045 235 360 287
2 点 7 分 1 厘 8 毛 2 糸 8 忽 1 微 8 繊 2 沙

IX. 関数電卓を導入した数学教育

パソコンやスマホにも，電卓はアプリとして準備されている。しかし学生が関数電卓モードとして利用できない実情を多くの大学教員は実感している。学生の提出したレポートを見ると，分数や数学記号の入力にまず苦戦している。小数表示と四捨五入（丸め）の無理解による間違えも多い。それにもまして，三角関数では弧度法と度数法，対数では常用対数と自然対数の混乱が多い。

数学の教科書通り入力ができる電卓（カシオ・スタンダード関数電卓 Casio fx-JP500；図 5）を活用した数学教育の授業アイデアを示す。

1. 関数電卓の利用

電卓の数字の配列は次のとおりである。この特徴を調べてみよう。

7	8	9
4	5	6
1	2	3

図 5. 電卓

設問 2. 次の操作で起こる現象を説明せよ。
ア. 反時計回り（右回り）
画面表示 123+369+987+741 =
イ. 時計回り（左回り）
画面表示 147+789+963+321 =
ウ. 対角線✕を通った一筆書き
画面表示 159+987+753+321 =
エ. 中央を >< のように一筆書き
画面表示 157+789+953+321 =
オ. 8（∞）の字のように一筆書き
画面表示 125+589+965+541 =

解答 いずれも 2220 である。

2. 導入（カレンダー）

表 6. カレンダー

日	月	火	水	木	金	土
		↖	↑	↗		
		←	n	→		
		↙	↓	↘		

教員は当該月のカレンダーを示しながら，「日にち（目付け日）を一つ選んでください」と発語する。次の設問を提示する。

設問 3. 次を求めよ。
① 取り巻く 8 つの日付の平均値を求めよ。
② 2 次正方行列の対角線の積の差を求めよ。

解答 ①目付け日と一致　② 7（大と小の差の意）

設問 4. 設問 3 を一般的に証明せよ。

解答 目付け日を n 日として後は明らか。

3. 数に興味を持たせる

教員免許状更新講習（2018 年度千葉科学大学）選択講習「子供を泣かさず笑わす算数的／数学的な活動」を，筆者の 2 人（船倉・齋藤）は元中高数学教員（田中啓康・榊和恵・田口君夫）とともに担当した。以下は講習案と受講者の反応を踏まえた検証に基づく。配布資料（図 6，図 8）は数学用語の英語を紹介する意味を込め，文献[9]等を踏まえ，講習担当者の責で作成したものである。

基本的な計算順序は次のとおりである。

1. 括弧（ ）がある場合（ ）の内から計算
2. 乗法×，除法÷は左から右へ計算
3. 加法+，減法−を左から右へ計算

日本では，百マス計算が象徴するように，計算処理のみに焦点が当てられている。正確に筆算ができるかを，繰り返し練習させ，計算結果の正誤にこだわるのが普通である。これに対して，米国では電卓を積極的に使用させている。むしろ，演算構造の理解に力点を置いている。

図 6 において，演算記号を理解するために空欄に四則演算や括弧（ ）を入れる問題が用意されている。日本の教科書ではほとんど見かけない問題である。

Ex.1. 空欄に演算記号 +，−，×，÷ のどれかを入れて正しい式が成立するようにせよ。

Ex.3. 括弧（ ）を適切に記入することによって等式が成立するようにせよ。

Order of operations

4+(3×2)÷2=
Step 1:Brackets
Do calculations in brackets first　　4+ 6÷2=
Step 2:Multiplication/division
Do×and÷next,working from left to right.　　4+ 3 =
Step 3:Addition/subtraction
Do + and − next,working from left to right.　　4+(3×2)÷2=4+3=7

The operations
+ Addition
— Subtraction
× Multiplication
÷ Division

Exercise
1 What operation sign is missing from each problem?
a 12□5=17　b 3□5=15　c 12□6=2　d 16□4=4　e 18□6=12　f 18□6=3
g 7□3=21　h 12□5=7　i 10□10=100
2 Answer these problems.
a (4×2)+2=　b 4×(6−4)=　c (5+2)×2=　d 5+(3×3)=　e (3×5)−10=
f (10÷2)+3=　g (2×5)÷2=　h 3×(12−7)=　i (3×4)÷6=
3 Copy these problems.
Insert brackets to make each problem correct.
a　5 × 3 + 1 =20　　b　8 − 5 × 3 =9
c　3 + 2 × 4 =11　　d　6 + 4 ÷ 2 =5
e　15 − 7 × 2 =16　　f　20 − 12 + 4 =4
4 Complete these problems.
a　9+(9÷3)−10=　　b　2×(4+2)−3=
c　(6−2)×(2×5)=　　d　(4+2)×(6÷3)=
e　(5×4)÷(13−3)=

Investigation
Use the number 4 up to four times, and any of the operators +,—,÷,× to make the numbers 0 up to 9.
The first two are done for you.
4 — 4 = 0　　4 ÷ 4 = 1

図 6. 演算の順序（教免講習：配布資料その１）

4. 古典的な問題

図 6 の囲みになってる“探求”は次のようである。

探求	数字 4 を 4 つまで使えるとして，四則演算＋，ー，×，÷を使って，０から 9 までを表せ。

また，“探求”は問題“Four fours”に由来する。

設問 5.　4 をちょうど 4 つ使って，整数を表せ。

解答　表示例を幾つかあげておく。

$$1 = 4 \div 4 = \log_4 4 = 4^{4-4} = 4 \div 4 + 4 - 4$$

$$2 = \sqrt{4} = 4 \div \sqrt{4} = (4+4) \div 4 = (44+4) \div 4!$$

一般的に計算練習は単調で無目的に感じられ，やる気が起こらない。また，問題は答が唯一であり，正誤が明確であるため，数学のグループ学習・協働活動の発展を阻んできた一因でもある。

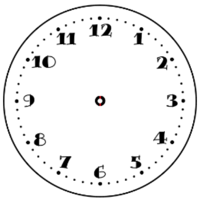


図 7. 時計型解答用紙

“探求”では“古典問題における条件“4 をちょうど 4 つ使って”を“4 つまで”と平易化してある。このため“探求”は多種多様な答がある。数に対して興味を持たせ，クイズ化しているが，実は，括弧（ ）や分数を使わないと全部が表せない仕掛けになっている。図 7 の解答用紙によってゴールを見える化し，達成感をあげたい。例えば，$2 = \sqrt{4}$，$3 = (4+4+4) \div 4$ とし，一人ひとりが異なる時計の文字盤のデザインができ，グループ活動の課題としても適するだろう。

5. 10 進法の小数と分数

分子が分母よりも小さい分数を真分数，整数部と真分数の和を帯分数と呼ばれる。帯分数を 1 つの分数にまとめたのが仮分数である。分子が小さいとき“真”であり，そうでなくて“仮”とつくのは計算過程の一過的なものとみなされていたが，中学校で文字式が導入されると，帯分数は全く使われなくなる。これに対して，分数の取扱い（図 8）は帯分数の役割を気付かせてくれる。

$$5 \times 2 = 10\,, 25 \times 4 = 100\,, 125 \times 8 = 1000$$

を用い，小数を分母が 10，100，1000 の真分数で表示し，10 進法の原理を理解させることを意図している。

Decimals
By studying this lesson, you will be able to
- represent a fraction with a denominator that can be written as a power of ten as a decimal number,
- represent a decimal number as a fraction, and
- multiply and divide a decimal number by a whole number.

Example 1.　Write each of the following fractions as a decimal number.

$$\frac{1}{10} = 0.1 \quad \frac{1}{100} = 0.01 \quad \frac{4}{1000} = 0.004 \quad \frac{97}{1000} = 0.0097 \quad \frac{751}{1000} = 0.751$$

Exercise 1.　Express each of the following fractions as a decimal number.

Method Ⅰ

$$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \frac{4}{10} = 3 + 0.4 = 3.4$$

Method Ⅱ

$$\frac{17}{5} = \frac{34}{10} = \frac{30}{10} + \frac{4}{10} = 3 + 0.4 = 3.4$$

Example 2.　Express $\frac{9}{8}$ as a decimal number.

Method Ⅰ

$$\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8} = 1 + \frac{125}{1000} = 1 + 0.125 = 1.125$$

Method Ⅱ

$$\frac{9}{8} = \frac{9 \times 125}{8 \times 125} = \frac{1125}{1000} = \frac{1000}{1000} + \frac{125}{1000} = 1 + 0.125 = 1.125$$

Exercise 2.　Express the following fractions and mixed numbers as a decimal numbers.

(1)$\frac{3}{4}$　(2)$\frac{8}{25}$　(3)$\frac{321}{500}$　(4)$\frac{39}{40}$　(5)$\frac{13}{10}$　(6)$\frac{27}{20}$　(7)$\frac{7}{5}$　(8)$\frac{27}{8}$　(9)$\frac{251}{250}$

図 8. 分数の取扱い（教免講習：配布資料その２）

2018 年度科研費で実施したテスト結果の一部である。

表 7. 拓殖大・千科大 1 年次生：有効回答 127 名

設問 6.	正答率
(1) 血液型 Rh-の割合は，日本人の場合 0.5%だが，これは 何人につき 1 人といえるか？	41.7%
(2)　2.3 時間は何時間何分？	55.9%

解答(1) 比例関係では

$$1\%:0.5\% = \frac{1}{100}:\frac{1}{x}$$

を解けばよいが，逆数の理解が難しい。

別解(1) 0.5%を分数に直し，

$$0.5\% = \frac{0.5}{100} = \frac{0.5 \times 2}{100 \times 2} = \frac{1}{200}$$

解答⑵ 帯分数として分子／分母を各々6倍して

$$2.3 = 2 + \frac{3}{10} = 2 + \frac{18}{60}$$

60進法であり，見通しがよい。

X．２桁以上掛け算の工夫

学校で学ぶ筆算法以外の計算法を紹介する。

1. 日本の乗法

江戸時代の寺子屋教育で発達した珠算の暗算法である。その原理は 10^n 倍することが小数点の移動(シフト)になることに対応する。昔のソロバンには小数点に当る定位点が打たれていなく，珠算で得た数値の意味を解釈して，適切に読み取ったのである。

五算術といい，

5倍は2割　　(×10÷2)
5割は2倍　　(×2÷10)
25倍は2割の2割　(×100÷2÷2)
25割は2倍の2倍　(×2×2÷100)

の計算をし，小数点を移動させていたのである。

2. ロシアの乗法

掛け算九九をすべて覚えていなくても，2の段の掛け算と割り算だけで，自然数（何桁でも）の掛け算を，表を作って計算する方法である。

例えば，掛け算 85✕18 を例示してみよう。

HALVE（÷2）	DOUBLE (×2)	累計 SUM
85	18	18
~~42~~	~~36~~	
21	72	90
~~10~~	~~144~~	
5	288	378
~~2~~	~~576~~	
1	1152	1530

HALVE において，上項を 2 で割り，余りは切捨てる。DOUBLE において，上項を2倍する。HALVE が偶数値のとき，その行の項をすべて消し，HALVE が1となったら，処理は終了する。残った DOUBLE の項の累計（SUM）をとっていくと

$$18 + 72 + 288 + 1152 = 1530$$

10進数の85を 2進数展開すると

$$85 = 1010101_{(2)} = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$

両辺を18倍して

$$85 \times 18 = 2^6 \times 18 + 2^4 \times 18 + 2^2 \times 18 + 2^0 \times 18$$
$$= 1152 + 288 + 72 + 18 = 1530$$

掛け算の順序を変えて,同じ計算をやってみよう。終わったら，２つの計算量を比較してみよ。

設問7. 掛け算 18✕85 をロシアの乗法をせよ。

HALVE（÷2）	DOUBLE（×2）	累計 SUM
~~18~~	~~85~~	
9	170	170
~~4~~	~~340~~	
~~2~~	~~680~~	
1	1360	1530

3. エジプトの乗法

ロシアの乗法は 2 の割り算を使うが，エジプトの乗法は2の掛け算のみで計算する方法である。

例えば，掛け算 85✕18 を例示してみる。

CODE（×2）	DOUBLE（×2）	累計 SUM
1	18	18
~~2~~	~~36~~	
4	72	90
~~8~~	~~144~~	
16	288	378
~~32~~	~~576~~	
64	1152	1530

85以下で最も大きい数値64をCODEの列から見つけ，引き算

$$85 - 64 = 21$$

をする。次に21以下で最も大きい数値16を見つけ，

$$21 - 16 = 5, 5 - 4 = 1,\ 1 - 1 = 0$$

0になったら，処理は終わる。

CODE における残った数値の和をとると

$$1 + 4 + 16 + 64 = 85$$（2進法と一致）

対応する DOUBLE の値の SUM（和）をとると

$$1152 + 288 + 72 + 18 = 1530$$

設問8. 掛け算 18✕85 をエジプトの乗法をせよ。

CODE（×2）	DOUBLE (×2)	累計 SUM
~~1~~	~~85~~	
2	170	170
~~4~~	~~340~~	
~~8~~	~~680~~	
16	1360	1530

設問9. 掛け算の順序を変えると，計算量（行数）は変化する。軽減するにはどうすればいいのか？また，その軽減率は幾らか？

解答 どちらの乗法とも「小×大」の方が計算量は小さい。「大×小」に対する軽減率は2進数展開の長さの比であり，その値の概数は対数値をとった比 log(小) : log(大) で見積もられる。

XI.　三角形の３辺

大学初年次教育 (数学) における講義例として菊池 [17] や上野 [18]が言及した定理「三角形において二辺の和は他の一辺より大である」を取り上げよう。

> **基本補題**　次の２つの条件は同値である。
> （条件 A）$a < b + c$ かつ $b < a + c$ かつ $c < a + b$
> （条件 B）$|a - b| < c < a + b$

> **設問 10.**　３本の棒を持ってきて，三角形が作れるか考える。2 本の棒の長さが 6 cm と 8 cm だとする。もう１本の棒の長さを x ㎝ とする。
> (1) 二等辺三角形になる x の値を求める
> 　ア.　作図（コンパス，ものさし）
> 　イ.　分度器で角度を計測
> 　ウ.　余弦定理の応用
> 　エ.　逆三角関数（関数電卓・ｸﾞﾗﾌ作図ｱﾌﾟﾘ）
> (2) 直角三角形になる x の値を求める。
> 　ア.　作図（外接円）
> 　イ.　正弦定理
> 　ウ.　三平方の定理
> 　エ.　逆三角関数
> (3) ３本の棒で三角形が作る
> 　ア.　x の範囲を不等式
> 　イ.　位置関係が分かるように図示

解答(1)　$x = 6$，8

線分の両端から同じ半径の円を描き交点を頂点とした二等辺三角形を描く。頂点の角度を計測する。余弦定理や逆三角関数を用い関数電卓を活用して頂点の角度を求めていく。

解答(2) $x = 10$，$2\sqrt{7}$

（三平方の定理の証明）

折り紙（大正方形）の４角を順に谷折りすると，中･小の正方形が表れる。大・中の面積の差

$$(a+b)^2 - c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

中・小の面積の差

$$c^2 - (a-b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

展開すれば$a^2 + b^2 = c^2$を得る。

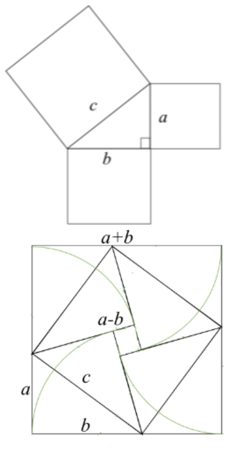


図 9 三平方の定理

（文化的な意義）

３辺が 3:4:5 である直角三角形は三四五（さしご）と呼ばれ，土木や建築の現場で直角を簡便に作る方法が古くから知られていた。3 尺:4 尺:5 尺より 6 尺:8 尺:10 尺の方が，精度が高く，大矩（おおがね）とも呼ばれていた。

解答(3) OA = 8 ㎝，OB = 6 cmとして，図 10 のように動径 OB を描く。$x = \mathrm{AB}'$ と置けば，

$$2 < x < 14$$

$x = 2, 14$ は線分であり三角形とはならない。

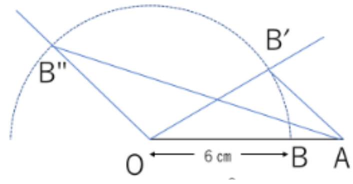


図 10.　動径によって変化する三角形

設問 10 に関連して次を考察することも興味深い。

(1) $\angle B'$ ($\angle B''$) の鈍角／直角／鋭角の変化を観察

(2) ３辺 OA, OB′(OB"), AB′(AB") の大小関係を観察

1.　２点間の最短距離

> **設問 11.**（有名な問題）点 A から点 B への最短コース（図 11）は，直線である。このとき，次に答えよ。
> ①　もし２点の間に川があるとき，橋（橋幅は 0，川と直交と仮定）を渡らなくてはならないという条件を付加する場合，最短コースを描け。
> ②　新橋に架け変えてよい場合，最短コースを描け。

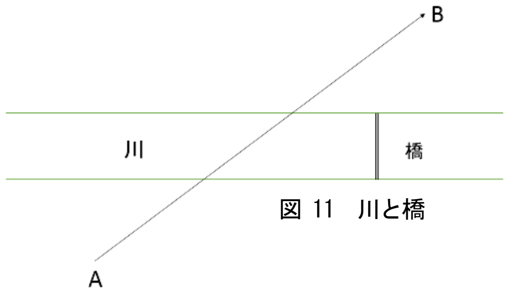


図 11　川と橋

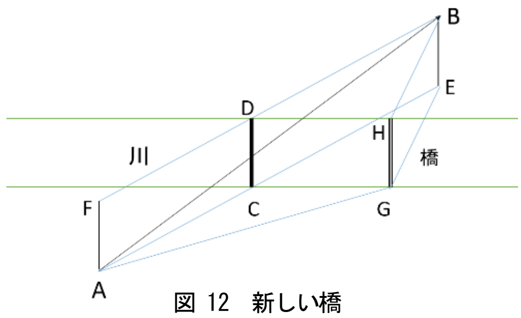


図 12　新しい橋

解答

既存の橋を渡るときは，図 12 の AG + GH + HB が最短コースである。

橋を新たに架けられるとしたら，四角形 BHGE が平行四辺形になるように，点 E をとり，点 A と結ぶ。川の端に点 C をとる。AC と BD が平行となるように点 D をとる。点 C から点 D へ新しい橋を架ければよい。

$$\mathrm{CD} = \mathrm{GH},\ \ \mathrm{AC} + \mathrm{CE} < \mathrm{AG} + \mathrm{GE}$$

であるから，

$$\mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DB} < \mathrm{AG} + \mathrm{GH} + \mathrm{HB}$$

したがって，CD に新しい橋を架ければよい。

例題 12. 直角三角形の 3 辺は$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{a+b}$ で与えられ，その上で，不等式

① $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

② $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

が成立する。ただし，$a>b>0$とする。

解答　XIの基本補題と図 13 より明らか。

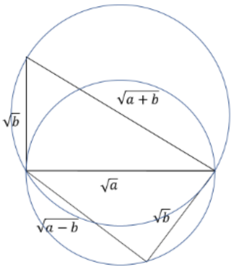


図 13　平方根と不等式

設問 13. 自然数 n に対して，$\sqrt{n}$ が作図できる。直角 2 等辺三角形 $(\sqrt{1}:\sqrt{1}:\sqrt{1+1})$ を初めとし，次に斜辺$\sqrt{2}$ を底辺として高さ 1 の直角三角形 $(\sqrt{2}:\sqrt{1}:\sqrt{2+1})$を描く。次に斜辺$\sqrt{3}$ を底辺として高さ 1 の直角三角形 $(\sqrt{3}:\sqrt{1}:\sqrt{3+1})$ を描く。同様に順に描いていくと，何回目の操作で，はじめて 1 回転（360 度）を越えるのか求めよ。

解答　三角定規で作図すると，17 回目で一周(図 14）。

別解　n=17 で364°46′
逆正接関数を用いた有限数列の和の不等式

$$\sum_{x=1}^{n}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)>360°$$

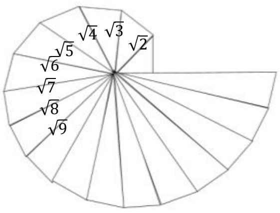


図 14 巻貝

も関数電卓（図 5）で計算可能である。

注意　Excel 関数では

$$\mathrm{DEGREES}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{1}{\mathrm{SQRT(x)}}\right)\right)$$

DEGREES：弧度法を度数法に換算

ATAN：arctan の意味　$\tan^{-1},\tan\text{^}(-1)$ 代用不可

SQRT：平方根の意味　^0.5，^(1/2)　　代用可能

XII. 勾配

直線の傾きであり，三角関数の正接 tan に当たる。

1. 坂道

図 15　道路標識

道路標識では勾配を百分率で表している。すなわち，勾配 P% は水平距離 100 m 進むと垂直距離 p m 上がるものとして定義されている。角度（度数）D とは，次の換算公式が成立する。

$$D=\frac{180}{\pi}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{P}{100}\right)$$

$$\frac{P}{100}=\tan\left(\frac{\pi}{180}\cdot D\right)$$

2. 法面勾配

平成 18 年に制定された「高齢者，障害者等の移動等の円滑化の促進に関する法律」においては，勾配を単位分数（1 m 上がるために水平に何 m 進むか）で表している。同施行規則第 16 条は，次のように規定している。

不特定かつ多数の者が利用し、又は主として高齢者、障害者等が利用する敷地内の通路は、次に掲げるものでなければならない。（一部略）

傾斜路は、勾配が十二分の一を超えてはならないこと・・・、勾配が二十分の一を超える傾斜がある箇所には手すりを設けること。

設問 14. ① 勾配十二分の一は何度か，何%か？
② 勾配二十分の一は何度か，何%か？
③ 高さ 10 m の避難タワーに設置されたスロープの全長を求めよ。

解答 ① 約5° ≒約 8% ② 約3° ≒約 5% ③ 120 m 超

3. 初学者の混乱

三角関数は度数法と弧度法が同一の関数記号を用いている。この混乱を解消するため，Windows PC の組込み関数電卓の関数は次のように末尾で区分している。

表 8. 三角関数の表記

数学書	度数法	弧度法
sin	sind	sinr
cos	cosd	cosr
tan	tand	tanr

XIII　真の値と概数

1. 誤差

高校数学の学習内容として，統計的に扱っても測定の誤差や精度を正面から扱っていず，定義 [24]から始める。

定義　真の値 A，近似値 a とすると，誤差は

$$\varDelta a=a-A$$

である。相対誤差は

$$\left|\frac{\varDelta a}{A}\right|$$

である。精度（確かさ／信頼度）は

$$1-\left|\frac{\Delta a}{A}\right|$$

である。$A \fallingdotseq a$　なので

$$0 \le \left|\frac{\Delta a}{A}\right| \fallingdotseq \left|\frac{\Delta a}{a}\right| \le 1$$

2. 常用対数

対数 $\log_a b$ の一般的な導入については，すでに高校で学んでいる。再度，公理的に理論展開しても，わからない。面白くない。つまらない。という感想しか生まれてこない。底が 10 の常用対数を使えるようになることを目指す教案を提示しておく。

$$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 1000 = 10^3$$
$$3 = 3\log 10 = \log 10^3 \fallingdotseq \log 2^{10} = 10\log 2$$
$$\therefore\ \log 2 \fallingdotseq 0.3$$

真の値　$\log 2 = 0.3010\cdots$と比較して，筆算の近似値として有用性が高い。

設問 15.　3, 7 の常用対数の値の概数[25]を求めよ。

解答 $4\log 3 = \log 81 \fallingdotseq \log 80 = 3\log 2 + 1 \fallingdotseq 1.9030$ なので，$\log 3 \fallingdotseq 0.475$，精度は 99.6%である。また、$2\log 7 = \log 49 \fallingdotseq \log 50 = 2 - \log 2 \fallingdotseq 1.7$　なので，$\log 7 \fallingdotseq 0.845$，精度は 99.5%である。

設問 16. 上記を参考にして，次の表を完成せよ。

常用対数	有効数字	筆算値	相対誤差	精度
log 2	0.301	0.3	0.003	99.7%
log 3	0.477	0.475	0.004	99.6%
log 4	0.602	0.6	0.003	99.7%
log 5	0.699	0.7	0.001	99.6%
log 6	0.778	0.775	0.004	99.4%
log 7	0.845	0.85	0.005	99.5%
log 8	0.903	0.9	0.003	99.7%
log 9	0.954	0.95	0.004	99.6%

3. Four fours の一つの解決

常用対数 log を用いれば，Four fours は次の定理で一般的に解決できる。

定理　5 以上の任意の自然数 n に対して，平方根を $m = 2(n-4)$回とれば，次の等式が成立する。

$$n = 4 - \left(\log\ \log\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}} - \log\log 4\right) \div \log 4$$

ただし，$\log\log x = \log(\log(x))$ である。

証明 $\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}} = 4^{2^{-m}}$ において常用対数を 2 回とれば，$-m\log 2 + \log\log 4$となり，後は容易である。

4. ネイピア数 e と自然対数

数学的定義の極限式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

を見ただけで拒否反応がでるかもしれないが，自然対数をとって（自然対数の連続性を暗黙で大前提とする）

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

ここで $h = 1/n$ と置きかえると，自然対数の微分係数

$$(\ln x)'|_{x=1} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

さらに $j = \ln(1+h)$ と置きかえると

$$\lim_{j\to 0}\frac{j}{e^j - 1} = 1$$

逆数をとって

$$\lim_{j\to 0}\frac{e^j - 1}{j} = 1$$

e^xを両辺に掛けて

$$\lim_{j\to 0}\frac{e^{x+j} - e^x}{j} = e^x$$

微分の定義で解釈すれば

$$(e^x)' = e^x$$

自然対数 $y = \ln x$ は指数 $x = e^y$ と書き直せる。逆関数の微分公式によって

$$(\ln x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

が成り立つ。

絶対値の微分公式（多くの教科書には未掲載）

$$(|x|)' = \frac{|x|}{x}$$

と合成関数の微分公式を用いて“対数微分”を得る。

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{|f(x)|'}{|f(x)|} = \frac{1}{|f(x)|}\frac{|f(x)|}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

また，不定積分に書き直すと“対数積分”を得る。

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

5. e の発見は高利貸しから

お金の貸借における金利に関して，「利息制限法」によって，金利の上限は

10 万円未満	20%
10 万円以上 100 万円未満	18%
100 万円以上	15%

と定められている。

例えば，元金 200 万円を金利 10%で借りたとする。

1 年間の利息は，200 万円×10%＝20 万円となる。返金をしないと，元金と合わせて，200 万円＋20 万円＝

220 万円が借金となる。この額が元利合計である。

2 年目は, 220 万円が元金となる。1 年間の利息は 220 万円×10%＝22 万円となる。2 年後の元利合計は 220 万円＋22 万円＝242 万円である。

一般化して，元金 A 円を年利率 $p\,\% = p/100$ で銀行に n 年預けたときの元利合計を A_n 円と書く。これが翌年の元金となるので $n+1$ 年後の元利合計は A_{n+1} 円となることを定式化すると

$$A_{n+1} = A_n + A_n \times p\% = A_n(1 + p\%)$$

すなわち，漸化式

$$A_{n+1} = A_n\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

を得る。等比数列を学ぶと，一般項

$$A_n = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

がわかる。$A_0 = A,\ A_1 = A(1 + p/100)$　である。

年利率 $p\% = 100\%$ （1 年で 2 倍返し：法律違反）

$$A_{n+1} = 2A_n$$

とする。初項 A，公比 2 の等比数列である。

さて, 1 年を待たず, 途中解約したとしよう。例えば, 半年で解約したとき，利息を半分(50%)とみたら

$$A\left(1 + \frac{50}{100}\right) = A\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

が受け取れる。そのままそっくり預ければ，半年後

$$B_2 = A\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25A$$

である。さらに，半年延長したら

$$C_2 = B_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = A\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = 3.375A$$

一般化して，1 年を m 回に分割し，$1/m$ 年で払い戻して，すぐに，同じ利率で預け直して，$1/m$ 年後に再び払い戻す。これを m 回繰り返し，1 年後 B_m 円になったとする。

$$B_m = A\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

さらに $1/m$ 年，同じ条件で預けて，最終的に$1 + 1/m$年後に払い戻したら， C_m 円になったとする。

$$C_m = B_m\left(1 + \frac{1}{m}\right) = A\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

したがって，不等式

$$B_m < B_{m+1} < Ae < C_{m+1} < C_m$$

が成り立つ。数学的に精緻な証明は複雑なので数値計算での納得で済ませたい。数列 $\{B_m\}$ は単調増加で Ae に収束，数列 $\{C_m\}$ は単調減少で Ae に収束する。2 つの数列で Ae は挟み撃ちされている。項別平均

$$D_m = \frac{B_m + C_m}{2}$$

は数列 $\{B_m\}$，$\{C_m\}$ よりも Ae の近似精度がいい。

設問 17. 次の表を確かめよ。（※　$A = 1$）

m	B_m	C_m	D_m	e の近似
1	2.0000	4.0000	3.0000	89.64%
3	2.3704	3.1605	2.7654	98.27%
5	2.4883	2.9860	2.7372	99.30%
7	2.5465	2.9103	2.7284	99.63%
9	2.5812	2.8680	2.7246	99.77%

6.　双曲線関数（hyperboric function）

設問 18. 双曲線関数と近似関数のグラフを描け。

(1)　$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

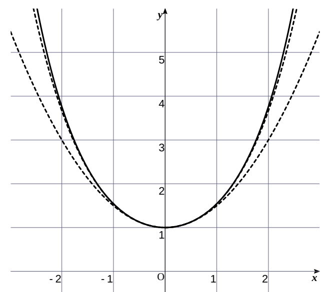
$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

(2)　$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$g(x) = x + \frac{x^3}{6}$$

関数グラフソフト（GRAPES7.7）で視覚的に理解する。https://tomodak.com/grapes/からダウンロード可能。

解答(1)



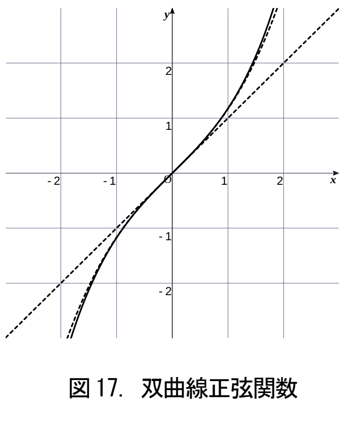
［実線］
$y = \cosh x$

［破線］
$y = 1 + \dfrac{x^2}{2}$

$y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

図 16. 双曲線余弦関数

解答(2)



［実線］
$y = \sinh x$

［破線］
$y = x$

$y = x + \dfrac{x^3}{6}$

図 17.　双曲線正弦関数

設問 18 からテーラー展開の近似式を得る。

$$e^x = \sinh x + \cosh x \fallingdotseq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

ここで，$x=1$ を代入すれば，筆算で

$$e \fallingdotseq \frac{65}{24} = 2.708\dot{3} \fallingdotseq 2.7$$

$x = 0.5$を代入すれば $e = \sqrt{e^2} \fallingdotseq 2.72$ と近似がよい。

7. 72 の法則

証券会社のホームページに資産運用して，2 倍になるまでの期間を概算する方法が紹介されている。

設問 19. 72 の法則
金融商品に投資する際に，元本が 2 倍になるまでの投資期間を概算する式は次である。
72 ÷ 年利(%)＝期間(年数)

解答 元金 A 円，年利 p %，期間 n 年とする。

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = 2A$$

A を約し，自然対数をとって

$$n\ln\left(1+\frac{p}{100}\right) = \ln 2 \fallingdotseq 0.6931 \quad \cdots(*)$$

x が 0 の近傍では，近似直線 $e^x \fallingdotseq 1 + x$ がよく使われるが，

$$e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

とし，$0 < x < 0.2$ のとき $1 + x/2 \fallingdotseq 1.05$とみて，

$$e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1 + \left(1+\frac{x}{2}\right)x \fallingdotseq 1 + 1.05x$$

を局所的により精度の高い近似直線として用いる。
自然対数をとって，近似式

$$\ln(1+1.05x) \fallingdotseq \ln e^x = x$$

を(*)に適用して

$$n \cdot \frac{p}{100 \times 1.05} \fallingdotseq 0.69 \quad \Rightarrow \quad np \fallingdotseq 72$$

設問 20. 元本 100 万円を年利 3%で運用，倍返しとなる投資期間を$72 \div 3 = 24$年と概算する精度を求めよ。

解答 投資期間n 年として，(*)までの展開から

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.03} = \frac{\ln 2}{\ln 1.03} = 23.44977\cdots$$

23 年＋約 160 日（月の大小，閏年で変動）である。精度は 98%である。

設問 21. 常用対数と自然対数の変換公式を示せ。

$$\log x = \log e \cdot \ln x$$
$$\ln x = \ln 10 \cdot \log x$$

解答 対数の底の変換公式から明らか。

設問 22. 常用対数 $y = \log x$ と自然対数 $y = \ln x$ のグラフの形は相似であることを示し，その相似比を有効数字 3 桁で求めよ。

解答 $y = \log x$， $Y = \ln X$ とおく。
相似比をa，平行移動を (p, q)とおく。すなわち

$$Y = ay + p, \quad X = ax + q$$

を代入する

$$ay + p = \ln(ax + q)$$

$x \longrightarrow +0$ ならば $y \longrightarrow -\infty$ であるから，$q = 0$ がまず分かる。

$$a\log x + p = \ln x + \ln a$$

両辺を対比して，

$$a = \frac{1}{\log e} = \ln 10 \fallingdotseq 2.30, \qquad p = \ln a \fallingdotseq 0.834$$

つまり，常用対数のグラフを約 2.3 倍し，y 軸に沿って約 +0.83 だけ平行移動すれば自然対数のグラフに重なるのである。

XIV. 国家試験に出題される数学

解答のために極めて多岐の知識が前提とされている。

1. 国家試験の指数・対数

設問 23.（第 95 回薬剤師国家試験）
体内動態が 1 コンパーメントモデル（一次反応）に従う薬物 800 mg を人に単回静脈注射したところ，投与直後の血中濃度は 40 μg/mL，投与 6 時間後の血中濃度が 5 μg/mL であった。この薬物の消失半減期（時間）を求めよ。

解答 n 時間後の血中濃度の等比数列 $\{a_n\}$ として，
$a_0 = 40$，$a_6 = 5$とおくと

$$\frac{a_6}{a_0} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

公比を r とおくと，

$$r^6 = 2^{-3}$$

$$t_{1/2} = -\frac{\log 2}{\log r} = 2$$

上述の解答は一見簡明そうだが，実は，次の 5 つの事実を知っていることが前提となっているのである。

(1) 初項 $a_1 = A$,末項 $a_N = B$ の等比数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{n-1}{N-1}}$$

(2) 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ において，任意の自然数 p に対し，部分列 $\{a_{n+p}\}$ の公比は rである。

(3) 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ において，自然数 p に対する部分列 $\{a_{pn}\}$ の公比は r^pである。

(4) 単調減少（公比 r, $0<r<1$）である等比数列 $\{a_n\}$ に対して

$$C(t) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{H}}$$

があって，自然数 n に対して，$C(n)=a_n$ が成り立つようにできる。ここで，$C(H)=C_0/2$ となる半減期 $H=t_{1/2}$ を求める公式

$$H=-\frac{\log 2}{\log r}=-\frac{\ln 2}{\ln r}$$

(5) 単調減少（公比r; $0<r<1$）である等比数列 $\{a_n\}$ に対して

$$C(t) = C_0\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}$$

があって，自然数 n に対して，$C(n)=a_n$ が成り立つようにできる。反応速度 k は公式 $k=-\ln r$ で求まる。

設問 24. $0<a<1$ に対して，関数 $y=a^x$ $(x>0)$ のグラフは(1)と(2)と相似であるが，その相似比 r を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2^x}$ $(x>0)$ (2) $y=\dfrac{1}{e^x}$ $(x>0)$

解答 相似比として，$y=rY+p$, $x=rX+q$ で変換して，(1)や(2)と比較すればよい。$p=0$ は自明。

$$a^q=r,\quad a^r=\frac{1}{2} \text{ または } \frac{1}{e}$$

(1) $r=-\dfrac{\log 2}{\log a}$ (2) $r=-\dfrac{1}{\ln a}$

2. 荒っぽい数学

「ああラプラス変換だから，システム工学のブロックダイアグラムの話だから，ステップ応答やデルタ関数が出てきて・・・」などと考えをめぐらす時間は国家試験本番にはない。しかしながら問題をきちんと解くには，多くの知識を必要とする。システム工学のテキストは数多いが，計算過程を丁寧に解説している書は少ない。

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^\infty te^{-st}\,dt\\&=\left[t\cdot\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty-\int_0^\infty 1\cdot\left(\frac{1}{-s}e^{-st}\right)dt\\&=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

この計算を理解するには，ネイピアの数 e の定義に始まり，指数関数 e^x の微分積分の公式，置換積分法，部分積分法，ここまでは高校数学Ⅲで扱われている。しかし無限積分なので，極限操作が必要である。医療系に進む者の多くは大学初年次教育で初めて学ぶものばかりである。正確さを求めて，数式がより長くより複雑になれば木を見て森が見えなくなってしまう。数学を専門にしているわけでない学生にとって専門を学ぶための道具に過ぎない数学が視界を邪魔して，本来の目的地が見えない。迷子となり時間内に目的地に辿り着かない。

$$\left[t\cdot\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{-se^{st}}=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}}=0$$

を「まあ，分母の方が分子よりはるかに数が大きくなるスピードが速いんだから，0 に近づくよね」で通り過ぎ，先へ進みたい（専門教員の本音）。限られた時間の中で，ほどよく数学的厳密さを保ちつつ，数学の“いいところ取り”をしたい。前述の理解が次の設問の前提である。

設問 25. $e^x, x^n, \ln x, \sqrt[n]{x}$ の $x\to\infty$ で考察せよ。

(A) 極限式を示せ。（ブルバキの危険な曲り角）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$, (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=0$

(B) 命題論理による表記の意味を説明せよ。

(1) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists N>0, \forall x>N, e^x>x^n$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists N>0, \forall x>N, \ln x<\sqrt[n]{x}$

(C) 関数のグラフの特徴を述べよ。

(1) $y=e^x$ は $y=x^n$ に比べて急激に増加

(2) $y=\ln x$ は $y=\sqrt[n]{x}$ に比べて緩慢に増加

解答 (A),(B),(C)は同値な設問である。

(A) ロピタルの定理を繰り返し適用すれば，容易に形式的証明できるが，計量的ではない。

(B) 抽象性が高く，∀, ∃の理解に難渋する。

(C) $n=1,2,3,4$ の場合だけでもグラフを描き，証明よりも意味の理解が実用上も役立つ。

3. 厳密な数学

臨床工学技士は，医療機器のメンテナンスが日々の業務であるが，医療機器の清掃・消毒のみならず，電気や電子回路の保守点検もその範疇に入る。

それらの必要上，厳密な論理性は重要であるが，高校数学で学ぶ $\cup,\cap$ を用いた抽象的な集合論ではなく，より実践的な論理回廊的な思考力が求められている。

・論理演算 ・ベン図 ・真理値表 ・ゲート記号

4 点セットで理解することが不可欠である。

ところで，国家試験の解答時間は極め短く，迷う時間がない。でも，集合だからまずベン図を描けとか，何が何でも真理値表を書けという固定的な指導では時間が掛かり過ぎる。問題に応じて，解答方法を選べる引き出しを増やす事が肝要である。設問として例示する。

設問 26. （臨床工学技士国試 23 回 午後）

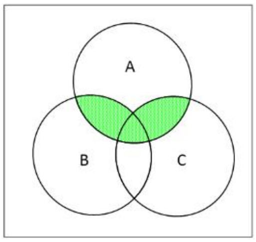
$$\overline{(A+B)}\cdot(\bar{A}+B)$$

に等しいのはどれか。

1.$\bar{A}$ 2.$\bar{B}$ 3.$\bar{A}\cdot B$ 4.$A\cdot\bar{B}$ ◎5.$\bar{A}\cdot\bar{B}$

設問 27.　（臨床工学技士国試 26 回 午前）

集合 A，B，C がある。図の網かけ部分に対応する論理式はどれか。



◎1.　A・(B＋C)
2.　B・(A＋C)
3.　A＋B・C
4.　B＋A・C
5.　C＋A・B

例題 28.　（臨床工学技士国試 24 回 午後）

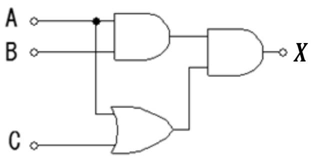
表に対応する論理演算はどれか。

1.　AND
2.　OR
3.　XOR
4.　NOR
◎5.　NAND

入力		出力
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例題 29.　（臨床工学技士国試 20 回 午後）

X を示す論理式はどれか。



◎ 1.　A・B
2.　A・B＋C
3.　A＋B・C
4.　A＋B＋C
5.　A・B・C

4.　強面な数学

数学が苦手な学生にとって，数式 $\sqrt{\ }$, Σ, lim, log, exp, sin, …をできれば避けたい鬼門である。

国家試験には，例えば，Σの公式はどうだったか，ゆっくり考える時間的余裕は与えられない。数学記号を見て，「ああ見るのも嫌だ。解くのは後回しにしよう」と思えば負けである。多くの問題は，数式の意味が読み取れれば，サンプルを計算しているにすぎず，しかも計算結果を求められているわけではない。

数学教師が数式記号の意味や意義を丁寧に説明するよりも，計算を受験テクニック的解法にこだわってしまって，難しく教え過ぎているのではないだろうか。その結果，学生は意味を解釈すれば容易なのに，問題を解こうとチャレンジせず，解答を放棄してしまっている事例にしばしば遭遇する。決して，こんな罪作りをしてはならない。四則演算や括弧 ( ) に始まり，様々な数式 $\sqrt{\ }$, Σ, lim, log, exp, sin, …の組合せは読解をまず優先すべき，計算は二の次だことを肝に銘じるべきである。

※ 的確かつ丁寧な査読に深謝する（2021.3.14 追記）。

引用文献

1) 須江雅彦，我が国の未来を担うデータサイエンティストの育成―政策の動向と滋賀大学の挑戦―，日本ソーシャルデータサイエンス論文誌，1 巻 1 号　(2017)
2) 櫻井尚子，データサイエンス概観―教育を中心にして―, 東京情報大学研究論集, 21, No.1 pp.51-59 (2017)
3) 片桐重男, 数学的な考え方の具体化, 明治図書 (1988) 復刻 Kindle
4) 山崎，富田，平林，羽田，留学生向けの科学技術日本語案内，慶応義塾大学出版会（2002）
5) 都築稔（編），わかりやすい薬学系の数学入門 (2011) 講談社
6) 鹿児島県第 2 回総合教育会議議事録（平成 27 年 8 月 27 日）(注:2020/11/30 現在，非公開)
7)　高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説，数学編数理編（2019）
8)　松川宏，「きはじ」と論理的思考.大学の物理教育, Vol.21-2　(2015)
9)　Barry Lewis，　Help Your Kids with Math: A Unique Step-by-Step Visual Guide，(2014)数学図鑑
10) 芳沢光雄 「%」が分からない大学生 日本の数学教育の致命的欠陥（2019）光文社新書
11) 上垣渡，「学制」期における算術教科書の態様，数学教育学会誌　80 巻 6 号（1998）
12) 松宮哲夫，各時代の教育思潮と算数・数学教科書－数理思想に基づく緑表紙に至る道，広報紙理数啓林 No.1～No.10，2013 年 4 月～ 2015 年 7 月
13) 芥川龍之介　1919（大正 8 年 3 月 23 日，東京帝国大学文科大学通信第 33 号)，芥川竜之介全集 第 4 巻
14) 岡野勉，算術教育史における「形式陶冶」批判の問題, 北海道大学教育学部紀要　56 巻　p115-141 (1991)
15) 仲本三二，算術の発生的指導法（1926）明治図書
16) 中島健三，算数・数学教育と数学的な考え方，東洋館出版社 (2015)　復刻 Kindle
17) 菊池寛，東京文理科大学新聞，1936 年 12 月
18) 上野健爾，数学この大いなる流れ，3 巻 2 号，1997 年度秋季総合分科会市民講演会
19) 三浦朱門, 日本人をダメにした教育, 海竜社 (1998)
20) 三浦朱門，妻をめとらば，(1962 年 4 月号) 数学セミナー創刊 50 周年記念号（2013）日本評論社
21) 羅密士〔著〕，福田治軒〔訳解〕，福田理軒〔閲註〕(1872)『代微積拾級訳解』東京：万青堂
22) 国際単位系（SI）基本単位の定義改定と計量標準，国立研究開発法人産業技術総合研究所，2020 年 3 月
23) 公文書の書式と文例, 1959 年 国語シリーズ 21 公用文の書き方資料集 三訂版 文部省
24) 矢野健太郎，春日正文，モノグラフ公式集，科学新興社（1969）初版
25) 宮本正敏，数値取り扱いの規則，科学教育，26 巻 1 号（1977）日本化学会