

弾性・非弾性ボールの力学モデル

— 力学入門教材開発の基礎として —

Introducing the Mechanical Simulation Models of the Elastic and Inelastic Ball.

— As the basic research for the introductory mechanic education —

塚本 浩司

Koji TSUKAMOTO

実験教材として普及している弾性・非弾性ボールの挙動について考察するために、(1) 弾性衝突 (2) 不完全非弾性衝突 (3) 完全非弾性衝突の3つの衝突現象について、バネ・速度抵抗を組み合わせた力学モデルを適用し考察した。

その上で各力学モデルから求めた計算結果と、他論文等から引用した実験データを比較したところ、大変よく一致し、これらのモデルの妥当性が明らかになった。その上で弾性・非弾性を教える教材の一案を示す。

1. はじめに

演示実験教材として普及している「弾性・非弾性ゴムボール」¹は、外見はまったく同じに見える2種類のゴムボールのセットである。

弾性ゴムボール（以下弾性ボール）は、硬い物体に対して反発係数がおおよそ0.8くらいを示す材質でできていて、いわゆる「スーパーボール」と同じ性質を示す。一方の非弾性ゴムボール（以下非弾性ボール）は、外見は弾性ボールとそっくりだが、硬い物体に対して反発係数はほぼ0となる材質でできている。授業でこの2つのボールをすり替えて演示すると、手品のような効果で生徒たちの関心を引くこともあり、教材として広く普及している。

高校などの物理の授業では、粘土でできたボール（以下、粘土ボール）と弾性ボールについて、「粘土ボールは〈運動エネルギーが粘土を変形させる仕事に変換され

た〉のに対して、弾性ボールは〈運動エネルギーがボールを変形する仕事に変換されなかった〉」と対比的に説明できる。

ところが、非弾性ボールは、〈床に落とすとはりついたように静止してしまう様子〉が、まるで粘土ボールと同じように見えるのに、元の形状を保っているので不思議に見えるのだ。

実際のところは、弾性ボールも非弾性ボールも、変形しないのではなく、〈瞬間的に変形し、すぐさま復元している〉のだが、変形する様子が目には見えないので、何が起きているのか素人目にはわかりにくいのである。

力学研究史でも、古来衝突現象は、〈一瞬（時間=0）で起きる現象で、通常の力学とは別の原理が働く神秘的な現象〉と考えられていて、科学者の頭を悩ませてきた。たとえばガリレオは、衝突によって生じる莫大な「打撃力」（衝撃力）について解明を試みて、果たせなかった²。また、デカルト、ホイヘンス、ニュートンらも衝突現象について論じたが、衝突前後の現象論的な法則にとどまり、衝突時の力学現象にせまるものではなかった³。1800年代に入るまで、衝撃によって生じる力＝衝撃力は Impulsive force あるいは Impulse（力積）として、 F と

連絡先：塚本浩司 ktsukamoto@cis.ac.jp

千葉科学大学教職課程

Teacher-Training course, Chiba Institute of Science

(2017年9月21日受付, 2017年12月22日受理)

t が分離できない量として扱われていた。衝突は、〈時間 $\rightarrow 0$ で作用する衝撃力〉による現象であり、通常の〈力による現象〉とは別ものと考えられていたからである。〈衝突現象も通常の力学現象と同様に運動法則が適用できて、単に力 F が作用する時間 t が極端に小さいだけだ〉ということが理解されるようになり、衝突の瞬間にどのようなことが起きているかが力学的に詳細に検討されるようになったのは、1800年代後半のことであった⁴。

現代の力学入門教育においても、衝突を扱うのは「運動量保存則」の章においてであり、ほとんど衝突前後についての解説が主である。衝撃力（力積）については、バットでボールを打つ現象について力と時間のグラフを用いてわずかに説明されているのみである⁵。

本稿では、衝突の瞬間に弾性ボールや非弾性ボールが一瞬の間に大きな力を受けて変形し、目に見えないほどすばやく復元してしまう様子について、〈バネと粘性抵抗を組み合わせた現象論的モデル〉によってシミュレートした計算結果を示す。この手法は、現代の振動工学の分野で一般に用いられている手法である。

考察に当たっては、完全弾性衝突（反発係数 $e=1$ ）の例として鉄球と鉄板の衝突、完全非弾性衝突（ $e\approx 0.8$ ）の例としてゴルフボールの衝突、完全非弾性衝突（ $e=0$ ）の例として、 α ゲルの測定グラフを、それぞれ書籍や論文等から引用した。この演示実験が興味を引く実験であるだけに、これらの現象中に力がどのように作用しているかを説明できる教材開発ができれば、動力学を導入するための有効な教材となり得ると考える。

本稿の目的は、おおざっぱに「衝突現象の瞬間に力がどのように作用しているか」を知り、今後の教材開発に資することが目的である。したがって、測定値を正確に吟味していない。また、本稿で示す力学モデルも振動工学においてすでによく知られた方法であるので、このモデルのプライオリティを主張するものではない。なお、本稿の最後では、「跳ね返る・跳ね返らない」を理解するための教材の一案を紹介している。

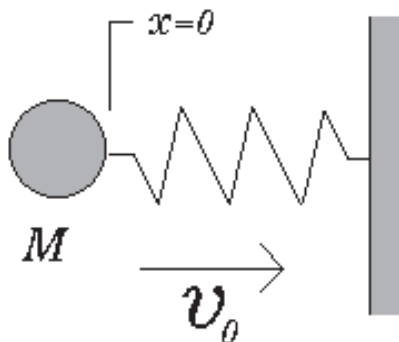


図1 弾性衝突の力学モデル

2. 弾性弾性衝突（ $e=1$ ）の力学モデル

弾性衝突（ $e=1$ ）の場合は、図1のようなバネモデルで単純化して考察することができる。衝撃力に対して重力は相対的に小さいので、無視することにする。物体は壁に接触後、単振動の半周期ののち、壁から離れると考えられる。

このとき運動方程式は、

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad (1)$$

と記述できる。

壁に接触した瞬間の時刻を $t=0$ 、速度を v_0 とすると、運動方程式の解は、

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{M}} t \quad (2)$$

である。これをグラフに描いたのが図2である。

図2のグラフにおいて、 τ は〈壁とボールの接触時間〉とみなすことができ、式(2)より、

$$\sqrt{\frac{k}{M}} \tau = \pi \quad (3)$$

の関係が成り立つ。

上記のモデルを実際の弾性衝突球のデーターにあてはめて検証するために、小坂敏文氏による、鋼球を鋼板に衝突させた場合のデーターを用いる⁶。鋼球を鋼板に衝突させると、スーパーボールよりもさらによく跳ね返り、反発係数は1に近い。小坂氏の図のキャプションには「半径100mm、厚さ8mmの円形鋼板に半径5mmの鋼球が671mm/sの速度で衝突したときの衝撃力波形」とある（図3）。本には書かれていないが小坂氏によると、「空中に縦に糸でつるした金属円板に、同じく（V字形に）糸でつるした鋼球を衝突させたものを、鋼球につけた圧

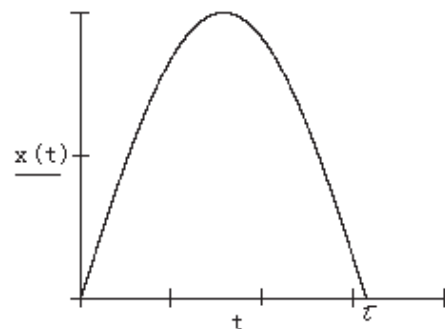


図2 式(2)のグラフ
(縦軸…変位 $x(t)$ 、横軸…時間 t)

電素子で出力電圧を測定し加速度から接触力に換算した」
とのことである。

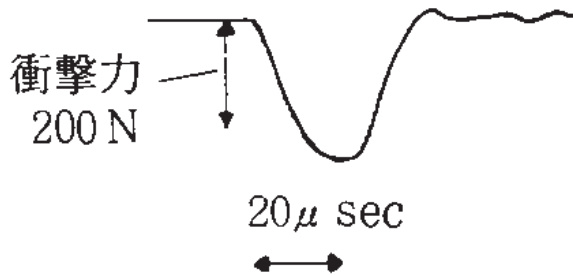


図3 小坂敏文氏の測定波形
(『振動工学』p.54. 図5-5. より引用)

グラフによると、接触時間は $\tau=40\ \mu\text{s}$ と考えられる。
また鋼鉄の密度 $\rho=7.8\times 10^3\text{kg/m}^3$ であるから、 $M=4.1\times 10^{-3}\text{kg}$ を得る。これらを式(3)に代入すると、

$$k = \frac{M\pi^2}{\tau^2} = 2.5 \times 10^7 \text{N/m}$$

が得られる。

この k および M 、 $v_0=6.7\times 10^{-1}\text{m/s}$ をもとに力 $F(=M\ddot{x})$ と時間 t の関係をグラフに描いたものが図4である⁷。参考のために、小坂氏のグラフを反転して並べてみた。

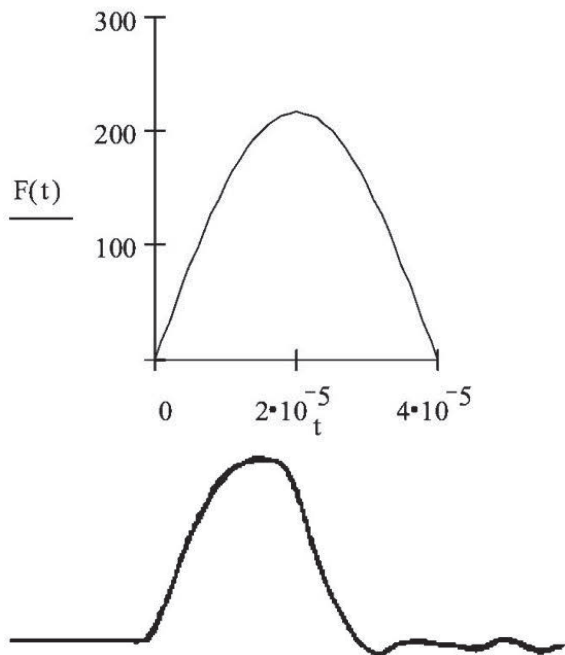


図4 弾性モデルに基づくグラフと測定波形の比較
(縦軸…力(N), 横軸…時間(s))

この場合のバネの最大変形量は、

$$x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} = 8.5 \times 10^{-6} \text{m}$$

であり、 F の最大値は、

$$F_{\max} = kx_{\max} = v_0 \sqrt{Mk} = 2.1 \times 10^2 \text{N}$$

となり、小坂氏の図とよく一致する。

実際の現象は、球は縮むにしたがって接触面積が増えるし、相手側の鋼板も変形するなど複雑なので、このような単純モデルがそのまま適用できるわけではない。しかし、弾性衝突の大まかなモデルとしては、このモデルは成功していると言っていいだろう(厳密な球の弾性衝突の理論はHertzによって1881年に解かれた⁸)。

671mm/sの速さは、落下運動にすると、23mmの高さからの落下速度に相当する。そこで、上記のモデルをもとに、大雑把に言うと、

「2センチほどの高さから鉄板にパチンコ玉を落下させると、瞬間的に20kg力ほどの衝撃力が生じ、そのときパチンコ玉は100分の1ミリほど変形してはねかえる」と言える。

3. 不完全非弾性衝突球の力学モデル ($e \approx 0.8$)

3. 1 モデル1

弾性ボールを床に落とすと、反発係数 $e \approx 0.8$ 程度で跳ね返る。このような場合の現象論的な力学モデルとして、図5のような、ばねと並列に速度に比例する抵抗を入れたKelvinモデルあるいはVoigtモデルと呼ばれるモデルが知られている⁹。

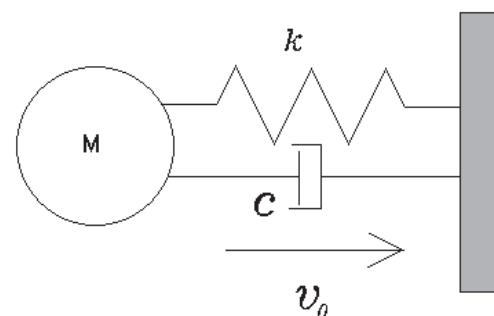


図5 不完全非弾性球の力学モデル1

この場合の運動方程式は、

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -c \frac{d}{dt} x(t) - kx \quad (4)$$

とかける。

これを初期条件

$$x(0) = 0, v(0) = \frac{d}{dt}x(0) = v_0$$

のもとに解くと、 $c^2=4Mk$ を境に解の形が変わる。ここでは、粘性による減衰が比較的小さい $c^2<4Mk$ の場合について考察する。すると解は

$$x(t) = e^{-\alpha t} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

ただし,

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \omega = \frac{\sqrt{4Mk-c^2}}{2M}, c^2 < 4Mk$$

を得る。

接触時間を τ とすると,

$$\omega \tau = \pi, x_{max} = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\alpha \tau}{2}}. \quad (6)$$

このような現象に関する実験データとして、宇治橋貞幸らによるゴルフボールのデータを使う¹⁰。この論文によると、ゴルフボールの反発係数は0.8前後になっているので、今の目的にはちょうど良い。それによれば、

$$\tau = 4.1 \times 10^{-4} \text{ s}, x_{max} = 4.2 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$v_0 = 37.5 \text{ m/s}, M = 45.1 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

である。

この値を式(6)に当てはめると、

$$\omega = 7.7 \times 10^3 \text{ s}^{-1}, \alpha = 7.4 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$$

となり、 k と c の値を以下のように求めることができる。

$$k = 2.7 \times 10^6 \text{ N/m}, c = 66 \text{ Ns/m}$$

さらに式(5)から、力 $F(t)$ と時間 t の関係式を求めると、

$$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} =$$

$$-M v_0 e^{-\alpha t} \left\{ \left(\omega - \frac{\alpha^2}{\omega} \right) \sin \omega t + 2\alpha \cos \omega t \right\} \quad (7)$$

が得られる。

計算結果を式(7)に代入し、縦軸を反転して描いたグラフが、図6の xI, FI である。比較のために、 $c=0$ とした $x0, F0$ を点線で描いた。

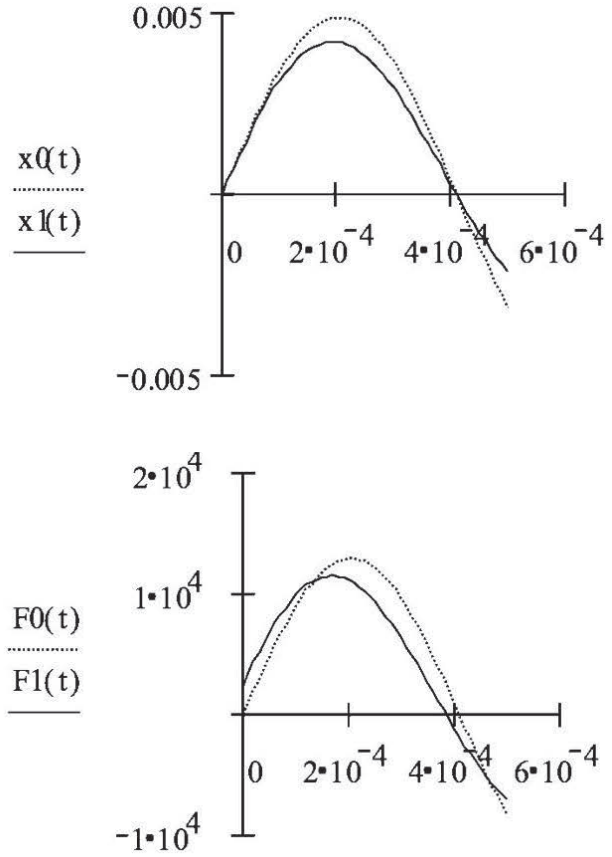


図6 モデル1に基づくグラフ

(左:縦軸…変位(m),横軸…時間(s), 右:縦軸…力(N),横軸…時間(s))
 $x0, F0$ は $c=0$ の場合。

この力のグラフの最大値はおおよそ $1.0 \times 10^4 \text{ N}$ となっているが、これは、宇治橋らの実験データと大変良く一致している。

ただ、宇治橋らの測定グラフと見比べると、図6では、ばねののびが0の時点ですでに力が生じており、また、ばねが完全に復元する前に力が0になっている点が一一致していない。

3. 2 モデル2

宇治橋らは、図7のようなばねをもうひとつ追加した力学モデルを採用し、試行錯誤的に求めた値として、

$$k_1 = 4.9 \times 10^6 \text{ N/m}, k_2 = 4.7 \times 10^6 \text{ N/m}, c = 250 \text{ N/(m/s)}$$

を与えている。

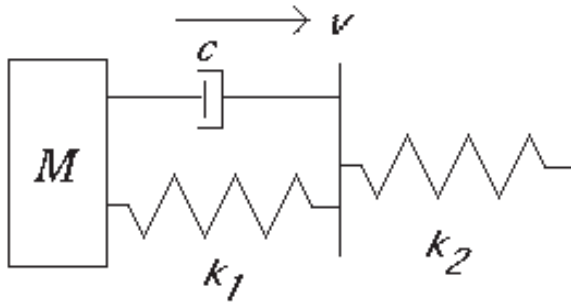


図7 不完全非弾性球の力学モデル2

ばね k_1 の変位を x_1 、 k_2 の変位を x_2 とすると、ボール全体の変位 x_0 は、

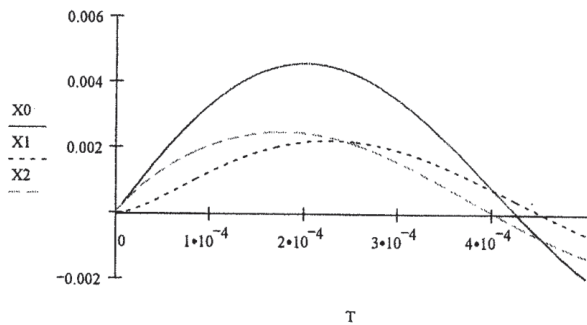
$$x_0 = x_1 + x_2 \quad (8)$$

とあらわせる。運動方程式は以下のようになる。

$$M \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) = -k_1 x_1 - c \frac{d}{dt} x_1 \quad (9)$$

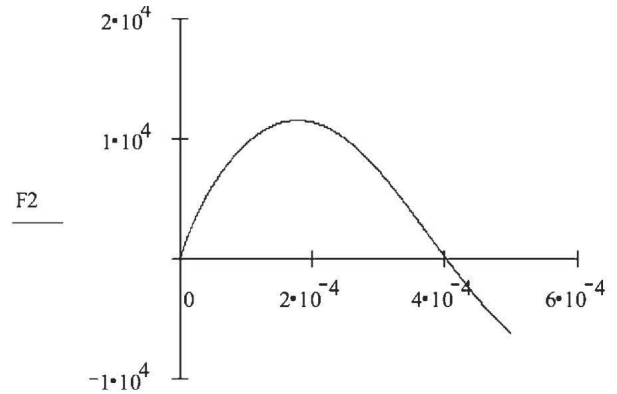
$$M \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) = -k_2 x_2 \quad (10)$$

初期条件 $t=0$ のとき $x=0$ 、初速度 $v_0=37.5\text{m/s}$ のもとに(9)、(10)の連立方程式を解いてグラフに描いたものが図8である。

図8 モデル2の数値計算結果に基づく変位-時間グラフ
(縦軸…変位(m), 横軸…時間(s))

x_1 はバネ k_1 の変位, x_2 はバネ k_2 の変位, $x_0=x_1+x_2$

同様に力と時間のグラフは図9のように描ける。

図9 モデル2の数値計算結果に基づく力-時間グラフ
(縦軸…力(N), 横軸…時間(s))

「モデル1」では、のびが0の時点で力が生じている点が、測定グラフと一致していなかったが、このグラフの方が、宇治橋らの測定グラフに近い形状になっている。

4. 完全非弾性衝突(いわゆる非弾性ボール)の力学モデル($e=0$)

非弾性ボールは、完全非弾性衝突($e=0$)の場合で、これは、モデル1の粘性抵抗が非常に大きくなった力学モデルで考察することができる。

そこで、3.1での運動方程式の解(5)を、 $c^2 > 4Mk$ の条件のもとに求める。

$$x(t) = \frac{v_0}{2\beta} \{e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t}\}, \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{c}{2M}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4Mk}}{2M}.$$

速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ は、次のようになる。

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{v_0}{2\beta} \{-(\alpha - \beta)e^{-(\alpha-\beta)t} + (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)t}\}. \quad (12)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{v_0}{2\beta} \{(\alpha - \beta)^2 e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha + \beta)^2 e^{-(\alpha+\beta)t}\}. \quad (13)$$

ためしにこの式に M と k は「3.1モデル1」で考察したのと同じ値をいれ、 c だけ大きな値($c=1.0 \times 10^3 \text{Ns/m}$)をいれてグラフを描いたのが、図10である。

このグラフから、衝突と同時に粘性抵抗によって速度が急激に減衰されて、その後ゆっくりと復元していく様子がわかる。このグラフでは、球が変形しはじめると、いきなり、力が最大になっている。速度最大時に粘性抵抗が最大になるためである。

このような $e=0$ の素材のデータとして、低反発ゲルを製造・販売している(株)シーゲルから提供された各商品(α ゲル, ω ゲル, θ ゲル)の〈力と変位のグラフ〉が図11である。ただし、残念ながら、このグラフは「古いデータなので、細かい数値はわからない」との条件付きで提供されたものなので、数値が一切入っていない。

この曲線がループ状になっているのは、変型方向と

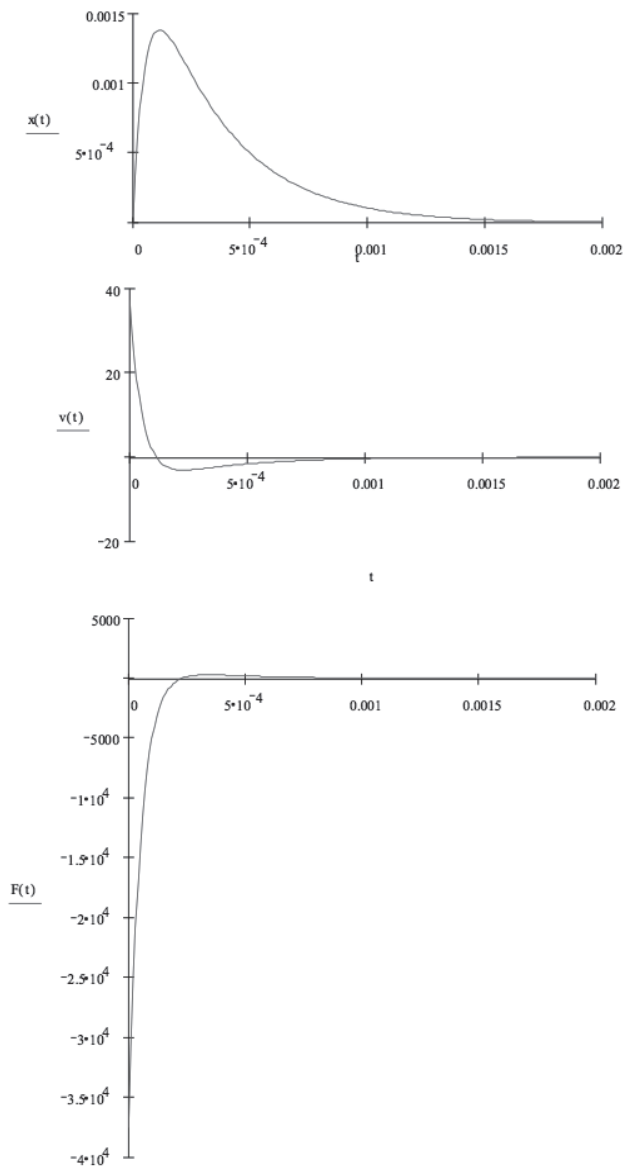


図10 モデル2の粘性抵抗 $c=1000\text{Ns/m}$ としたときのグラフ。
上から縦軸変位(m), 速さ(m/s), 力(N), 横軸はすべて時間(s)

復元方向での力の作用の仕方が異なっていたからだと考えられる。ほぼ右肩上がりの直線に近くなっている部分は、静的に力が作用しているため $\frac{dx_1}{dt} \approx 0$ となって粘性抵抗の影響を受けない変化と考えられるので、変形方向は静的にゆっくり力を加え、それを解放することによって得られたデータではないかと推測される。そこで、 $c=0$, $c=1.0 \times 10^3 \text{Ns/m}$ とした場合の〈力 F と変位 x のグラフ〉を組み合わせ描いたものが、図12である。

数値データがないので、これ以上のくわしい解析ができないのが残念だが、図11の実験データのグラフにだいたい形が似ている。

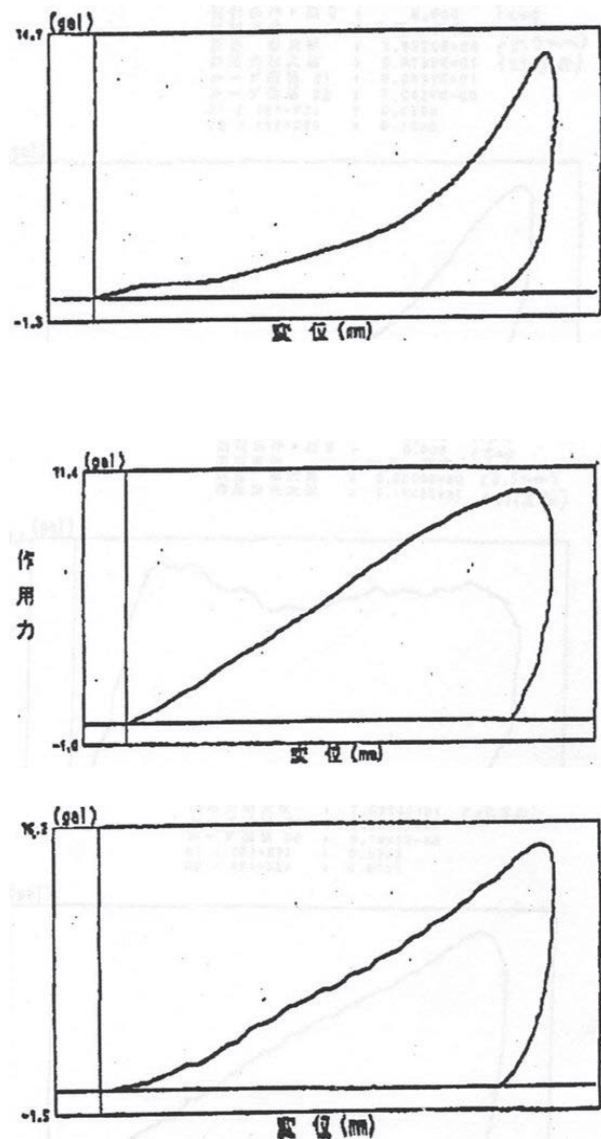


図11 (株)シーゲル提供の測定グラフ

古いデータのため、数値目盛りがない。

上から, α ゲル, ω ゲル, θ ゲル

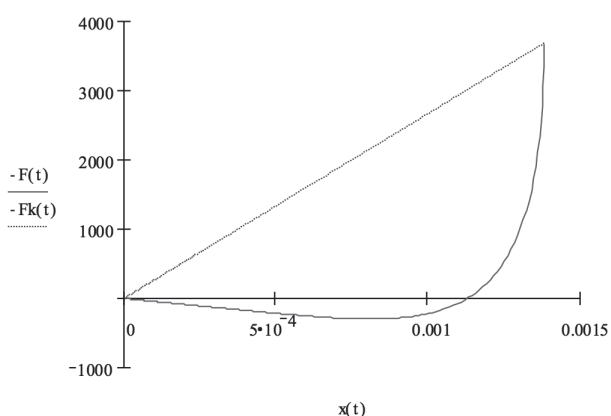


図12 変形方向では粘性抵抗 $c=0$ として描いたモデル1の力-変位グラフ

縦軸…力(N), 横軸…変位(m)。点線は変形方向($c=0$), 実線は復元方向($c=1000\text{Ns/m}$)。

5. 弾性, 非弾性ボールを理解するための教材づくり

ここまで, 弾性ボールは, 〈バネのようにすばやくもとの形状に復元するためによく跳ね返る〉のにたいして, 非弾性ボールは, 〈内部の粘性によって, ゆっくりともとの形状に復元するために, 跳ね返らない〉という現象論的モデルが, 実験結果によく一致するということ, 力学モデルによって解析できることを見てきた。

粘土などは, 〈変形する過程で運動エネルギーが熱などのエネルギーに散逸してしまう〉のにたいして, 非弾性ボールは, 変形-復元のサイクルの中で, 粘性により運動エネルギーが他のエネルギーに散逸していると考えられる。

高校物理では, バットとボールのような衝突現象での運動量と力積のグラフが紹介されるが, 主に衝突現象はほとんど運動量保存則でのみ論じられている。今回紹介されたようなモデルが紹介されることはほとんどない。

弾性・非弾性ボールも, デモンストレーション実験として紹介されるものの, そのメカニズムは紹介されていない。衝突のようなほとんど時間がかかっていないかのように見える現象もまた, 通常の力学現象の延長にあることを知ることは, 力学を学ぶ上で重要であると考えられる。

そこで, 跳ね返る, 跳ね返らないのメカニズムについて, 考察する教材を考案し, 発表した。それが以下の実験である¹¹⁾。

線の切れた電球を硬くて重い石の上に落とす。電球を少しずつ高いところから落としていって, どのくらいまで跳ね返るか調べていく。最後に割れるときの破片はどのくらいの高さまで跳ね返るか?

実際に金床などの硬い物体に向けて電球を落としてみると, 割れないときの電球はおどろくほどよく跳ね返る。1メートルを超えるくらいの高さで落とすと電球は割れるが, 割れるときは破片は横には飛び散るが, ほとんど上には上がってこない。

電球が割れないときは, ガラスで形づくられる電球玉が変形し, その後, すばやく復元するので, 跳ね返る。しかし, 落下させた電球玉が割れるときは電球玉を構成するガラス事態は復元しようがないので跳ね返らない。このようなことがわかる。



図13 板倉・塚本『衝突の力学』p.129. より

とてもインパクトがあり, 弾性衝突と非弾性衝突の違いがよく分かる実験として好評である。ただし, この実験は, 破壊によって運動エネルギーを他のエネルギーに変換してしまう実験なので, 非弾性ボールのように, 〈元の形に復元する〉現象をシミュレートする実験ではない。

今後, そのようなことが目に見えてわかる演示実験を研究し, 開発・考案できたらと思っている。

6. おわりに

本稿では, 教材として普及している弾性・非弾性ボールを現象論的力学モデルで考察できることを報告した。このような手法は機械工学ではよく知られた手法だが, 物理教育では, ほとんど紹介されることはなかった。そこで, 一般書籍や論文などからデータを引用して, 解析手法を紹介したが, 厳密な考察に耐えるものではない。

このような考察を元に, 衝突現象を力学入門教育の根本にすえた教育プランを提案したいと考えている。

謝辞

本稿は1998年に行った未発表の考察をもとにまとめました。当時、宇治橋貞幸教授（当時東京工業大学教授）には、研究資料を送っていただき、東京工業大学で実験装置も見学させていただきました。また、(株)シーゲルからは、実験データを提供いただきました。小坂敏文教授（当時東京高等専門学校教授）にもメールによる質問に丁寧に答えていただきました。板倉聖宣先生（国立教育政策研究所名誉所員）には、基本的な問題意識をいただき、指導していただきました。また査読者には工学的な考察について、いくつか重要な指摘を頂きました。

上記の皆様に感謝します。

引用文献

- 1 たとえば、(株)ナリカ「非弾性・弾性ゴムボール」No：P70-3840
- 2 板倉聖宣：科学と科学教育の源流。仮説社，264-277，東京，2000.
- 3 吉仲正和：“ニュートンの力学—その出発点”，38-73，ニュートン自然哲学の系譜，平凡社，東京，1987.
- 4 George Barnes: Study of Collision Part I., , *American Journal of Physics*, 26, pp.5-8., 1958.
- 5 たとえば三浦登ほか：高等学校理科用文部科学省検定済教科書 物理. 東京書籍，東京，66-85. 2016.
- 6 小坂敏文：“正弦波半波による加振”，振動工学入門. パワー社，東京，54-56, 1984.
- 7 本論文の数値計算およびグラフ描画はMathCAD7 (MathSoft.inc.) を使用した。
- 8 金多潔監訳：弾性論. コロナ社，東京，423-436, 1973 (Timoshenko SP, Goodier JN: Theory of Elasticity 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1970) .
- 9 日本ゴム協会編：ゴム工業便覧. 財団法人日本ゴム協会，51-54, 1994.
- 10 宇治橋貞幸他：ゴルフ・ボールの反発特性の計測と評価. 日本機械学会論文集 60巻577号C編, 258-264, 1994.
- 11 板倉聖宣，塚本浩司：衝突の力学. 仮説社，東京，2005.

Introducing the Mechanical Simulation Models of the Elastic and Inelastic Ball.

— As the basic research for the introductory mechanic education —

Koji TSUKAMOTO

Teacher-Training course, Chiba Institute of Science

To consider the mechanism of the elastic and inelastic ball which prevailed as an effective teaching material for physics education, mechanical simulation models were introduced. These models are constructed for three types of phenomena such as (1) elastic collision, (2) partially inelastic collision, (3) perfectly inelastic collision. Since calculation results from these models are consistent with the experimental data, the validation of them was confirmed. Then, a proposal of demonstration to teach the mechanism of elastic and inelastic collision is shown.