

# 乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第3報）

—乱れ圧力および速度の動的システムの解析—

## On the Analytical Solution for the Vortex Structured Pressure of Turbulent Boundary Layer (Part 3)

—Mathematical Analysis of the Kinematics of Turbulent Boundary Structure—

田中 厚成<sup>1)</sup>・岡本 恒<sup>2)</sup>・服部 恭介<sup>3)</sup>

Atsushige TANAKA, Hisashi OKAMOTO and Kyouusuke HATTORI

近年発展の極めて著しいスーパー・コンピュータを用いた大規模数値解析により、流体中の圧力の3次元等圧面、および流体が作用する複雑な等応力面が、3次元立体形状として可視化され、更にそれらの形成、移動、および変化を求めることにより複雑で難解な流体現象を説明する方式が確立しつつある。これは単に工学的意義が大きいばかりでなく、今世紀まで残された数学の難問の一つである流動現象の支配方程式の解を3次元的に図示しているとも受取ることができる。この数値解析には世界トップクラスのコンピュータを年単位で連続運用する必要があり、結果の検証には、等圧面、等応力面の形状、強さ、位置、移動速度等の詳細で膨大な基礎データが必要になる。このため長期間かけてシステムチックな基礎実験研究の裏付けに基づいて成されたものである。

本研究では複雑多岐な等圧面、等応力面を用いた流体のダイナミクス（動力学）を流体の支配方程式の解析解（：数式解）と見なしている。第1報で関数解析により有意な解を得る条件を定め、その条件から得られる解により流体中の多数の渦構造圧力が提示できることを示した。第2報では解法の有効性を高める漸近解の収束方式、高次微分の信頼性等を検討した。本報では数値実験で用いている弱周期境界条件を用いても数式解は安定し、且つ、流体中の渦構造圧力の個数、形状、間隔を合致する上で有効であることを示す。これにより本方式の実用化の可能性も提示することができたと考える。

連絡先：田中厚成 atstanaka@cis.ac.jp

1) 千葉科学大学危機管理学部動物環境システム学科

*Department of Animal and Environmental System, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science*

2) 千葉科学大学危機管理学部医療危機管理学科(非常勤講師)

*Department of Medical Risk and Crisis Management, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science*

3) 千葉科学大学危機管理学部医療危機管理学科

*Department of Medical Risk and Crisis Management, Faculty of Risk and Crisis Management, Chiba Institute of Science*

(2012年10月5日受付, 2012年12月21日受理)

### 1. 緒言

自然の中で生き抜いてきた魚や、自然の中で発生する台風、竜巻や津波等は流体現象と深く結びついているが、現在の流体解析では十分説明できない課題を多く含んでいる。例えば前者の場合として、回遊魚が水中で空気中の自動車並みの高速で泳げる理由、後者の例として津波の形態、衝撃力、遡上力等、未だ現象を明確に推定できない状態と考えられる。これらに共通する流体中にある物体形状の一部あるいは全体が変形しながら移動する場合の流動現象を解析するには、対象物体の動力学と流体の動力学、および、それらの関係を示す動的に変化する境界条件を解く必要が

ある。本研究は、この流体-構造連成問題を解析する上で特に難しい流体の動力学を理解し、流体の支配方程式を解析で解くことにより精度を損なうことなく更に簡便に扱える方法を開発することを目的としている。

流体の動力学の研究は1990年前後に当時の世界トップクラスのスーパー・コンピュータを1年以上連続使用して、流体の支配方程式を極めて細かなメッシュを選択して直接解くダイレクト・シミュレーション (DNS解析) により行われた<sup>3), 7), 9)</sup>。特にRobinsonは「乱流境界層構造の動力学」<sup>3)</sup> において「動力学」の用語を用い、3次元流体可視化技術を駆使して流動現象のダイナミクスを説明している。これは安定性を中心に扱ってきたこれまでの動力学とは大いに異なっていると感じる。

彼らの研究における解析手法と結果の特長として次のことが言える。

#### 1) 解析方法

流体の支配方程式はナビエ・ストークス方程式と呼ばれ、未だ21世紀の数学的解決すべき難問の一つであり、乱流現象という非定常現象を解明する上で解の安定性すら保証されていない。そこで、彼らは徹底した入口、出口、側面等での流体の詳細なデータを取得し、現実の流れを設定した。計測できない非定常な現象をナビエ・ストークス方程式を直接差分して解くDNS解析により求めている。

#### 2) 流動現象の解析

Robinson<sup>3)</sup> は空の雲の形状、移動、変形から空の気象の動きを説明するように、乱流境界層中の渦構造圧力の等圧面形状、中心軸方向、移動、変形、分散具合と、流体の流れの関係を3次元図示技術を用いることにより、乱流境界層の特長および境界層の発達過程を可視化している。これはこれまでの乱流境界層の平均速度分布、レイノルズ数と抵抗係数の関係等を求める定常現象を主に求める流体力学から乱流境界層内のバーストの突然の発生に関する内容や主流と乱流境界層内の乱れた渦構造圧力の形成、成長までの内容を可視化データ技術を駆使して示している。

上記後述2つの内容は、ナビエ・ストーク方程式が流体のダイナミクス (動力学) をも表している事を示し、逆にこれら動力学がナビエ・ストーク方程式の解であり、数学的ではないが方程式が一見解けたと見なすことが出来る。

Kline<sup>9)</sup> はこのRobinson<sup>3)</sup> の論文内容を乱流境界層に関する流体のダイナミクスを一枚にまとめて図示し、階層の概念を導入して、先ず等圧面、等応力面からなる多様体を、それぞれが属する階層に分別し、次にこれら多様体の動きを階層内の動きと階層間の動きに分けて、全体として複雑な流体のダイナミクスを説明している。これはナビエ・ストーク方程式の解を示しているとも解釈できるし、

乱流境界層の流体のダイナミクスをまとめているとも取れ、今後の流体の研究の方向を示していると考えられる。本研究は、これらKlineの示した流体のダイナミクスを、スーパー・コンピュータによるDNS解析等の数値シミュレーションに頼らず、数式だけを用いてナビエ・ストークス方程式から直接乱流境界層に関する流体のダイナミクスを導くことを目的とする。解析およびまとめは以下の順で行なう。

- 2 有意解を持つ境界条件
- 3 渦構造圧力の算出
- 4 横方向に中心軸を持つ渦構造圧力とレイノルズ応力
- 5 階層構造とダイナミクス
- 6 結言

尚、本研究は第3報であり、各報の位置付けは下記で与える。

第1報<sup>1)</sup> ではナビエ・ストークス方程式から導かれる圧力に関する線形のポアソン方程式を関数解析で解析し、3次元ポアソン方程式は通常解は存在せず、周期境界条件の時、有意な解が得られること、および、乱流境界層内の数式を与えた渦構造圧力を実験データと同じように分散させる事により乱流境界層の流体特性が再構築できることを示した。但し、この周期境界条件はDNS解析で用いている出口境界において乱流境界層の速度分布が入口境界での速度分布を相似に近い状態を維持した境界条件<sup>7)</sup> (；以下、弱周期境界と表示する) より解析的には少し厳しい境界条件となった。

第2報<sup>2)</sup> においてナビエ・ストークス方程式の線形項を式の左辺、圧力項と非線形項を右辺にまとめて外力項とし、外力項の値を解析中は一定として線形偏微分方程式として扱った。この式とポアソン方程式を連立させ、初期外力を与え線形偏微分方程式を解いた。次にそれらの解を用いて外力項を更新し、上述の計算を繰り返し漸近解を求める方式を選択した。この際、安定となる多次元空間内の収束方式を提案した。また、解析上必要な高次微分可能な関数接続方法、有限領域でのフーリエ級数表次式の指数関数置換方法を示した。そして、今後進むであろう具体的な階層解析の方向を参考として載せた。

本報ではDNS解析で主流方向の両端境界で用いている弱周期境界条件も横方向の周期境界条件と同じく解を安定化させるのに有用であるかを検討する。また、DNS解析で行なわれた3次元多様体間のダイナミクスも数式で表示可能かを調べるため、例として横方向に中心軸を持つ渦構造圧力と、主流方向の速度の変動分 $u'$ と鉛直上向き方向の速度の変動分 $v'$ の積 $u'v'$ に関して数式で関係表示が可能かを検討する。また、これまで物理的に設定されている階層の数学的な相違について言及する。

## 2. 有意解を持つ境界条件

### 2-1 周期境界条件を持つ3次元ポアソン方程式

$x, y, z$ 方向の無次元速度をそれぞれ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 、時間を $t$ 、圧力を $\tilde{p}$ 、密度を $\tilde{\rho}$ 、動粘性係数を $\nu$ で与えると、流体の支配方程式は次のように表わされる：

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-1)$$

ここで

$$\tilde{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} = (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}}, \quad \nabla' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla' \nabla$$

(2-1) 式より、質量保存則を考慮すると圧力に関する次の3次元ポアソン方程式が得られる：

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{p} = \tilde{g} \quad (2-2)$$

$$\tilde{g} = -\tilde{\rho} \nabla' \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} \right\}$$

ここでは第2報で導入した周期境界条件の数式表示を用いて、その意義をシステム線図を用いて検討を行なう。

横方向の垂直面の位置を $z=0$ 、もう一方の対となる垂直面の位置を $z=b$ とし、ラプラス演算子 $u, v, w$ を用いて(2-2)式をラプラス変換すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2 + w^2) \tilde{p} \\ &= \tilde{G} + u(\tilde{p}|_{x=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \Big|_{x=0} + v(\tilde{p}|_{y=0}) \\ & \quad + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \Big|_{y=0} + w(\tilde{p}|_{z=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= \tilde{G}_\zeta + w(\tilde{p}|_{z=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (2-3)$$

ここで $L$ をラプラス変換を表わすとし

$$\tilde{G} \equiv L L L \{ \tilde{g} \}$$

$$\tilde{G}_\zeta$$

$$\equiv L L L \left\{ \tilde{g} + u(\tilde{p}|_{x=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \Big|_{x=0} + v(\tilde{p}|_{y=0}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \Big|_{y=0} \right\}$$

で与えている。

(2-3) 式は次式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{w^2 + u^2 + v^2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} \tilde{G}_\zeta + \begin{pmatrix} w & 1 \\ w^2 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} \right\} \end{aligned} \quad (2-4)$$

(2-4) 式を演算子 $w$ のみに着目してブロック線図表示を行なうと図2-1のようになる。この系は式中に行列式の値が0となる行列を含んでおり、不定となる。そこでこの式が周期境界条件で有意の解を持つようになるのを確認する。これは既に第2報において記述しているが、弱周期境界条件の場合と比較するため簡単に示す。

簡単のため、 $\tilde{p}, \tilde{G}_\zeta$  の記号をそれぞれ $L L \{ \tilde{p} \}$ 、

$L L \{ \tilde{g}_\zeta \}$  の時も用いるとし、(2-4) 式を $w$ に関して

逆ラプラス変換すると次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \\ &= \int_0^z \mathbf{c}(z-\zeta) \tilde{G}_\zeta(\zeta) d\zeta + \mathbf{C}(z) \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (2-5)$$

ここで便宜的に $\omega \equiv \sqrt{u^2 + v^2}$ と置き、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(z-\zeta) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sin \omega(z-\zeta) \\ \cos \omega(z-\zeta) \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &\equiv \begin{pmatrix} \cos \omega z & \frac{1}{\omega} \sin \omega z \\ -\omega \sin \omega z & \cos \omega z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-6)$$

で表し(2-5)式に次の周期条件を入れる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \Big|_{z=b} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} \quad (2-7)$$

これにより、(2-5) 式は次のように書き表わされる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C}(b)) \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = \int_0^b \mathbf{c}(b-\zeta) \tilde{G}_\zeta(\zeta) d\zeta$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{z=0} = \int_0^b (\mathbf{I} - \mathbf{C}(b))^{-1} \mathbf{c}(b - \zeta) \tilde{g}_\zeta d\zeta \quad (2-8)$$

(2-5), (2-8) 式より、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \tilde{p} \right) &= \int_0^z \mathbf{c}(z - \zeta) \tilde{g}_\zeta(\zeta) d\zeta \\ &+ \int_0^b \mathbf{C}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{C}(b))^{-1} \mathbf{c}(b - \zeta) \tilde{g}_\zeta(\zeta) d\zeta \quad (2-9) \end{aligned}$$

ここで便宜的に  $\omega \equiv \sqrt{u^2 + v^2}$  と置き、以下の関係式

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{C}(b))^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega b & -\frac{1}{\omega} \sin \omega b \\ \omega \sin \omega b & 1 - \cos \omega b \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega b}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega b}{2} & \frac{1}{\omega} \cos \frac{\omega b}{2} \\ -\omega b \cos \frac{\omega b}{2} & \sin \frac{\omega b}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{C}(b))^{-1} \mathbf{c}(b - \zeta) &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega b}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \cos \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) \\ -\sin \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) \end{pmatrix} \\ &2 \sin \frac{\omega b}{2} \mathbf{c}(z - \zeta) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega b}{2} \sin \omega(z - \zeta) \\ 2 \sin \frac{\omega b}{2} \cos \omega(z - \zeta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \cos \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) + \frac{1}{\omega} \cos \omega \left( \frac{b}{2} - z + \zeta \right) \\ \sin \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) + \sin \omega \left( \frac{b}{2} - z + \zeta \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より (2-9) 式は次式で表わされる。

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \tilde{p} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^z \frac{1}{2 \omega \sin \frac{\omega b}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega \left( \frac{b}{2} - z + \zeta \right) \\ \omega \sin \omega \left( \frac{b}{2} - z + \zeta \right) \end{pmatrix} \tilde{g}_\zeta d\zeta \\ &+ \int_z^b \frac{1}{2 \omega \sin \frac{\omega b}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) \\ -\omega \sin \omega \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) \end{pmatrix} \tilde{g}_\zeta d\zeta \quad (2-10) \end{aligned}$$

(2-4) 式, (2-7) 式のブロック線図は図2-2のように与えることができる。図において、圧力の入口境界と出口境界とを等しく置くことにより、ブロック線図においてはフィードバックに相当する機能が与えられる。これにより、ポアッソン方程式で解が求まらなくなる要因の

(2-5)、(2-6) 式の  $\sqrt{u^2 + v^2}$  が特異点にならない問題を解消している。図2-2において、周期境界条件(2-7)式だけを扱っているが、実現象においては、別の種々の等価条件があると考えられる。

## 2-2 弱周期境界条件

$z$  方向のように左右側壁の圧力が等しいとする周期境界条件は実現象として十分ありうるが、 $x$  方向のように乱流境界層が速度分布を相似に近い状態を保ちつつ発達してくる場合には、周期境界条件を少し変形させた次式の条件を本研究では「弱周期条件」と名付け、この条件のときの解の安定性を検討する。

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \Big|_{x=l} = (1 + \Delta_k) \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \Big|_{x=0} \quad (2-11)$$

ポアッソン方程式は選択する境界が変わるため、 $\tilde{g}_\xi, \tilde{G}_\xi$  を用いると、次のように表せる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) &= \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \tilde{G}_\xi + \begin{pmatrix} u & 1 \\ u^2 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \end{pmatrix} \Big|_{x=0} \right\} \quad (2-12) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\xi &\equiv \tilde{g} + v \left( \tilde{p} \Big|_{y=0} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \Big|_{y=0} + w \left( \tilde{p} \Big|_{z=0} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \tilde{G}_\xi &\equiv L_x L_y L_z \{ \tilde{g}_\xi \} \quad (2-13) \end{aligned}$$

圧力は周期条件の(2-9)式と同様に付の式で与える。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \\ &= \int_0^x \mathbf{a}(x-\xi) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi + \mathbf{A}(x) \left( \frac{\tilde{p}}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{x=0} \quad (2-14) \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{A}$  は  $\omega_x \equiv \sqrt{v^2 + w^2}$  を用い、次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x-\xi) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_x} \sin \omega_x (x-\xi) \\ \cos \omega_x (x-\xi) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}(x) &\equiv \begin{pmatrix} \cos \omega_x x & \frac{1}{\omega_x} \sin \omega_x x \\ -\omega_x \sin \omega_x x & \cos \omega_x x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2-14) 式より弱周期境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \Big|_{x=\ell} \\ &= (1+\Delta_k) \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \Big|_{x=0} \\ &= \int_0^\ell \mathbf{a}(\ell-\xi) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi + \mathbf{A}(\ell) \left( \frac{\tilde{p}}{\partial z} \tilde{p} \right) \Big|_{x=0} \quad (2-15) \end{aligned}$$

(2-13) 式、(2-15) 式をブロック線図で与えると、図2-3のようになる。図2-3の出口の値を用いた負帰還係数は図2-2の場合の1に対して、 $1/(1+\Delta_k) \cong 1-\Delta_k$  と少し小さくなっている。図2-3の安定状態は(2-15)式より

$$\left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) \Big|_{x=0} = \{(1+\Delta_k)\mathbf{I} - \mathbf{A}(\ell)\}^{-1} \int_0^\ell \mathbf{a}(\ell-\xi) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \quad (2-16)$$

として得られ、圧力および圧力勾配は次式で表される。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right) &= \int_0^x \mathbf{a}(x-\xi) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \\ &+ \mathbf{A}(x) \{(1+\Delta_k)\mathbf{I} - \mathbf{A}(\ell)\}^{-1} \int_0^\ell \mathbf{a}(\ell-\xi) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \quad (2-17) \end{aligned}$$

ここで

$$\{(1+\Delta_k)\mathbf{I} - \mathbf{A}(\ell)\}^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1+\Delta_k - \cos \omega_x \ell & -\frac{1}{\omega_x} \sin \omega_x \ell \\ \omega_x \sin \omega_x \ell & 1+\Delta_k - \cos \omega_x \ell \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4(1+\Delta_k) \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \Delta_k + 2 \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2} & -\frac{2}{\omega_x} \sin \frac{\omega_x \ell}{2} \cos \frac{\omega_x \ell}{2} \\ -\omega_x \sin \frac{\omega_x \ell}{2} \cos \frac{\omega_x \ell}{2} & \Delta_k + 2 \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega_x \ell}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega_x \ell}{2} & \frac{1}{\omega_x} \cos \frac{\omega_x \ell}{2} \\ -\omega_x \cos \frac{\omega_x \ell}{2} & \sin \frac{\omega_x \ell}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2(1+\Delta_k) \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\ell) \{(1+\Delta_k)\mathbf{I} - \mathbf{A}(\ell)\}^{-1} \mathbf{a}(\ell-\xi) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega_x \ell}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega_x x & \frac{1}{\omega_x} \sin \omega_x x \\ -\omega_x \sin \omega_x x & \cos \omega_x x \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left\{ \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega_x \ell}{2} & \frac{1}{\omega_x} \cos \frac{\omega_x \ell}{2} \\ -\omega_x \cos \frac{\omega_x \ell}{2} & \sin \frac{\omega_x \ell}{2} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_k}{2(1+\Delta_k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_x} \sin \omega_x (\ell-\xi) \\ \cos \omega_x (\ell-\xi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \omega_x \sin \frac{\omega_x \ell}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega_x \left( \frac{\ell}{2} + x - \xi \right) \\ -\omega_x \sin \omega_x \left( \frac{\ell}{2} + x - \xi \right) \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\Delta_k}{4(1+\Delta_k) \omega_x \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sin \omega_x (\ell + x - \xi) \\ \omega_x \cos \omega_x (\ell + x - \xi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、圧力と圧力勾配は次式で与えられる。

$$\left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \tilde{p} \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^x \frac{1}{2\omega_x \sin \frac{\omega_x \ell}{2}} \left( \frac{\cos \omega_x \left( \frac{\ell}{2} - x + \xi \right)}{\omega_x \sin \omega_x \left( \frac{\ell}{2} - x + \xi \right)} \right) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \\
 &+ \int_x^\ell \frac{1}{2\omega_x \sin \frac{\omega_x \ell}{2}} \left( \frac{\cos \omega_x \left( \frac{\ell}{2} + x - \xi \right)}{\omega_x \sin \omega_x \left( \frac{\ell}{2} + x - \xi \right)} \right) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \\
 &+ \int_0^\ell \frac{\Delta_k}{4(1+\Delta_k)\omega_x \sin^2 \frac{\omega_x \ell}{2}} \\
 &\quad \times \left( \frac{\sin \omega_x (\ell + x - \xi)}{\omega_x \cos \omega_x (\ell + x - \xi)} \right) \tilde{g}_\xi(\xi) d\xi \quad (2-18)
 \end{aligned}$$

(2-18) 式と図2-3の負帰還による系の安定化および有意の解の取得につき見当を行う。図2-3の負帰還量を次のように周期境界条件の時の負帰還量と負帰還減少量とに分けて考えて次式で与える。

$$\begin{aligned}
 &\text{弱負帰還量} \frac{1}{1+\Delta_k} \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=\ell} \\
 &= \text{負帰還量} \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=\ell} - \text{負帰還不足量} \frac{\Delta_k}{1+\Delta_k} \left( \frac{\tilde{p}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=\ell} \quad (2-19)
 \end{aligned}$$

ここで、(2-18) 式に示されるように(2-19) 式右辺第1項は(2-9) 式と同じく本来不定である系を安定化することに寄与している。右辺第2項は(2-17) 式の右辺第3項に相当し、式としては(2-19) 式右辺第1項の負帰還とは逆の正帰還に相当しており流れの不安定性が増加し、渦構造圧力が下流に進むにつれ渦構造圧力の等圧面の径が大きくなることによる流れへの影響を示していると考えられる。

### 2-3 周期境界／弱周期境界条件の与え方

周期境界／弱周期境界条件の与え方について検討する。人為的に様な速度分布の流れを作るため、循環型の風洞や回流水槽においては、計測流路部入口前に絞りダクトを据付けて左右の側壁の流速が一致するように横方向周期境界条件を意図的に作っている。また回流水槽では底面を若干傾斜させ流れ方向に周期境界条件に近くなるようにしているケースも見受けられる。しかし、本検討対象である乱流境界層に関する周期境界条件を取り入れた実験例は見当たらないようである。流体が自然に負帰還を掛けたような流れが、掛けていない他の流れより顕著に残っていると考える方が解り易いと思われる。

これらの条件を定量的に与える方法として、本解析のような数式だけから求める方法も含め、下記2通りの方法が知られている。

(1) 流れに関するナビエ・ストークス方程式、および圧力に関するポアソン方程式を乱流境界層の流れを決める支配方程式とし、且つ、ポアソン方程式の方が不安定になり易いことから、先ずポアソン方程式が有意な解を持つ条件だけから求める。そして次に求められた圧力を前者のナビエ・ストークス方程式の外力項とし、この解析にも有意な解を持つ条件を導入して解析解を求める。尚、弱周期境界条件に関しては下記(2)も参考にして導いている。

(2) Spalart (1988)<sup>7)</sup> はDNS解析において、高さ方向の解析格子を底面と平行にして計算し、ある時刻での $x$ 方向速度の乱れ成分を表示したところ、図2-4に示すように出口に近づくにつれ、小さくなる傾向が出た。このため入口から出口まで繰り返し計算が可能となるよう出口方向に格子間隔を広げ、そのように後方で広がる格子に合う周期境界条件を用いて有効な解析結果を得ている。

## 3 渦構造圧力の算出

### 3-1 圧力方程式の解

渦構造圧力には、圧力方程式に $z$ 方向の周期境界条件を付加して得られる $z$ 方向に中心軸を一部有するものと、 $x$ 方向に弱周期境界条件を付加して求められる $x$ 方向にほぼ水平な中心軸を部分的に有するものがある。これらは既に本研究の第1報、第2報において関数解析手法により次のように求めている。

第1報： $y$ 方向と周期境界条件を有する $z$ 方向の2方向は逆ラプラス変換が可能となるが、残りの $x$ 方向は逆ラプラス解が見つからなかった。そこで、逆ラプラス変換の代わりに等価と扱える逆フーリエ変換により算出している。この結果としてフーリエ変換の特徴でもある周期性のある現象に適しており、解析結果により求められる渦構造圧力の概要は十分把握することが可能となった。但し、入口境界条件を明確に導入することが難しいこともあり、ラプラス変換の特徴であるダイナミクス解明には必ずしも適しているとは言い難い面が残されている。

第2報：逆ラプラス変換式を数学公式集<sup>12)</sup> から見出すことを諦め、逆ラプラス変換のために選択した積分路を用いて求めた。逆ラプラス変換する式は級数で与えられており、各項の逆フーリエ変換した式と逆ラプラス変換した式は第2種変形ベッセル関数の係数が異なるだけであり、且つ、級数で必要なのは本解析では高々3次まで求められれば十分使えると考えた。

したがって、第2報において流体現象のダイナミクス解析に適した手法に改良されたと考える。

一方、被解析対象である渦構造圧力の主要部は円柱形状に近く、全体として円柱座標系に適した部分と直交座標系

に適した部分をどのように両立するかの問題が残されている。そこで第1報、第2報で共通して用いた方式は、渦部の円柱座標系の代わりに  $x-y$  座標系に互いに独立した関数を用いることにし、渦構造圧力の  $x$  軸断面を指数関数表示、 $y$  軸断面を三角関数表示を行い、変数分離が使い易い形にして近似を行い、DNS解析による数値解析結果との対応を試みている。

第3報：本解析では渦構造圧力解析に第2報で用いた3次元逆ラプラス変換を用いる。円柱座標系に適した渦構造圧力が直交座標系で表される流路中での挙動を調べる場合には渦構造圧力はそれぞれの位置が離れており、互いに影響が少ないと考えられるので、渦構造圧力の中心軸まわりは、その軸を中心とした円柱座標系と全体を通して直交座標系を使い、対象に応じ座標系を分けることにする。

### 3-2 渦構造圧力の計算

周期境界条件を付加し、2方向ラプラス変換  $L_x L_y \{\tilde{p}_z\}$  を  $\tilde{p}_z$  と区別するため  $\tilde{P}_\zeta(u, v, z)$  とすると、(2-9) 式は次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\zeta(u, v, z) &= \int_0^z \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2} \sin \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2} b} \\ &\quad \times \cos \sqrt{u^2+v^2} \left( \frac{b}{2} - z + \zeta \right) g_\zeta(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \int_z^\ell \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2} \sin \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \\ &\quad \times \cos \sqrt{u^2+v^2} \left( \frac{b}{2} + z - \zeta \right) g_\zeta(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (3-1)$$

(3-1) 式を逆ラプラス変換するために(3-1)式の被積分関数をデュッチェ・フェルカ<sup>5)</sup>で用いられている次の演算子のフーリエ級数展開で表示する。

$$\begin{aligned} &\frac{\cos \sqrt{u^2+v^2} \left\{ \frac{b}{2} - (z-\zeta) \right\}}{2\sqrt{u^2+v^2} \sin \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \\ &= \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{u^2+v^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{b}(z-\zeta)}{u^2+v^2 - \left( \frac{2k\pi}{b} \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3-2)$$

(3-2) 式を用いると(3-1)式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\zeta(u, v, z) &= \int_0^b \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{u^2+v^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi}{b}(z-\zeta)}{u^2+v^2 - \left( \frac{2k\pi}{b} \right)^2} \right\} G_\zeta(u, v, \zeta) d\zeta \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (3-3)$$

第2報より、(3-3) 式を2次元ラプラス変換すると  $\beta_k \equiv 2k\pi/b$  を用いて次式で表せる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_z(x, y, z) &= \frac{1}{2\ell} \int_0^b \int_0^\ell \int_0^\ell \{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta) \} d\phi d\xi d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\ell} \sum_{k=10}^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\ell \tilde{g} \left\{ K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right) \right. \\ &\quad \times \cos \beta_k(y+\eta) - K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \\ &\quad \times \cos \beta_k(y-\eta) \left. \right\} e^{\beta_k(x-\xi)} \cos \beta_k(z-\zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3-4)$$

ここで  $x=0$  の入口条件を(3-3) 式に適合させ

$$\tilde{p}_\zeta|_{x=0} = \tilde{b}_0(y, z), \quad \frac{\partial \tilde{p}_\zeta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \tilde{b}_1(y, z),$$

$$L_y \{\tilde{b}_0\} = \tilde{B}_0, \quad L_y \{\tilde{b}_1\} = \tilde{B}_1,$$

で与え、(3-3) 式の第1項を次式で与える。

$$\tilde{p}_{\zeta 1} = \int_0^b \frac{1}{b(u^2+v^2)} \{ \tilde{G}(u, v, \zeta) + u\tilde{B}_0(v) + \tilde{B}_1(v) \} \quad (3-5)$$

このとき、(3-5) 式の逆ラプラス変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{z1}(x, y, z) &= \frac{1}{2b} \int_0^b \{ \tilde{b}_0(y + ix, \zeta) + \tilde{b}_0(y - ix, \zeta) \} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2b} \int_0^b \int_0^\ell \{ \tilde{b}_1(y + i\xi, \zeta) + \tilde{b}_1(y - i\xi, \zeta) \} d\zeta d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2b} \iiint \{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \zeta) \\ &\quad + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \zeta) d\zeta d\xi d\phi \} \end{aligned} \quad (3-6)$$

これを用い、(3-4) 式より  $\tilde{p}_z$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 & \tilde{p}_z(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{2b} \int_0^b \left\{ \tilde{b}_0(y + ix, \varsigma) + \tilde{b}_0(y - ix, \varsigma) \right\} d\varsigma \\
 &+ \frac{1}{2b} \int_0^b \int_0^x \left\{ \tilde{b}_1(y + i\xi, \varsigma) + \tilde{b}_1(y - i\xi, \varsigma) \right\} d\varsigma d\xi \\
 &+ \frac{1}{2b} \int \int \int \left\{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \varsigma) \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \varsigma) d\varsigma d\xi d\phi \right. \\
 &+ \frac{1}{2\pi\ell} \sum_{k=10}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{g} \left\{ K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \right. \\
 &\quad \times \cos \beta_k(y + \eta) - K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \\
 &\quad \left. \times \cos \beta_k(y - \eta) \right\} e^{\beta_k(x - \xi)} \cos \beta_k(z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (3-7)$$

ここで  $K_0$  は 0 次の第 2 種変形ベッセル関数を示す。

(3-6) 式で求められた渦構造圧力の概略は指数関数、三角関数、ベッセル関数の積の級数との積分で与えられ、計算が容易ではない。そこで、(3-7) 式の平均値にはほぼ相当する (3-6) 式を用い、得られる渦構造圧力の等圧面形状が DNS 解析で求めている形状のうちで代表的な  $z$  方向に平均化して得られている形状に相当しているかを調べる。このため、ここでは (3-3) 式の直交座標系表示の代わりに極座標系を用い、運動量保存則の式から圧力を求めることにする。

極座標系運動保存則は次式で与えられる<sup>10)</sup>。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \\
 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3-8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\
 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{r \partial \theta} + \nu \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3-9)
 \end{aligned}$$

ここで、 $v_r$ ；半径方向速度、 $v_\theta$ ；周方向速度、 $\Delta$  は次の形で与えられる。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$$

(3-8) 式に  $\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$  を掛け、(3-9) 式に  $\frac{\partial}{r \partial \theta}$  を掛けて

和を求め、質量保存則

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = 0 \quad (3-10)$$

を代入すると、極座標系の圧力方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) \\
 &= - \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\
 &\quad - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \quad (3-11)
 \end{aligned}$$

(3-11) 式で表せる等圧面形状は、中心軸を  $z$  軸と平行な中心軸を持つ円柱とみなせる形状を有しており、これは (3-7) 式の右辺第 3 項に相当している。簡単のため (3-7) 式の入口条件を省略して、数式と図形の関係を図 3-1 に与える。円柱内の圧力分布、速度分布に関しては次の 3-3 で検討する。

### 3-3 $z$ 軸方向に中心軸を持つ渦構造圧力の圧力分布

渦構造圧力の中心軸に垂直な断面における速度の概要は図 3-2 のように与えられている。図 3-2 より周速はある半径まで一定の角速度  $\omega_0$  で増速し、ある半径を超えると、急速に周速が低下している。この最大周速を持つ半径を便宜的に渦構造代表半径と名づけ、 $r_0$  で与え、 $r = r_0$  における周速度を  $v_0$  とすると、図 3-1 より次の関係式が得られる。

$$v_\theta = \frac{r}{r_0} v_0, \quad v_r = 0; \quad r < r_0 \quad (3-12)$$

図 3-1 では渦構造圧力での半径方向の速度変化は顕著であるが、周方向の速度変化は殆んど無く渦構造形状には影響していないと考える。そこで、これ等の事より (3-11) 式は次式のように半径方向の変化のみを扱うことができる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \\
 &= - \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \quad (3-13)
 \end{aligned}$$

ここで、定数  $c_a$  を用いると関係式

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{c_a}{r} = 0 \quad (3-14)$$

が成り立つことにより、(3-13) 式は次式で表すことができる。



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{c_a}{r} \quad (3-15)$$

上記の式の右辺第2項は半径方向の速度成分の周方向変化を求める項で、他の項と比べ小さいことが考えられるため省略し次式で与える。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r^2}{2} \right) + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{c_a}{r} \quad (3-16)$$

ここで  $r < r_0$  の範囲では関係式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta^2) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} v_0^2 \right) \\ &= \frac{2r}{r_0^2} v_0^2 \\ &= 2 \frac{v_\theta^2}{r} \end{aligned} \quad (3-17)$$

より、(3-16) 式は

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = -\frac{v_r^2}{2} + \frac{v_\theta^2}{2} + c_a \log r + c_b \quad (3-18)$$

となる。ここで  $c_b$  は定数。さらに (3-18) 式の右辺第3項が  $r=0$  の時発散するのを避けるため  $c_a=0$  とする。また図3-2を参考に

$$v_r = 0 \quad ; \quad r < r_0 \quad (3-19)$$

とする。

これにより (3-18) 式は次式で与えられる。

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = \frac{v_\theta^2}{2} + c_b \quad (3-20)$$

(3-20) 式の定数  $c_b$  は  $r \geq r_0$  の圧力と接続するように定める。

$r \geq r_0$  の場合、図3-2を参考に

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = \frac{r_0}{r} v_0 \quad ; \quad r \geq r_0 \quad (3-21)$$

で与える。

(3-17) 式より、(3-16) 式は次のようになる。

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = -\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_\theta^2}{2} + c_a \log r + c_b \quad ; \quad r \geq r_0 \quad (3-22)$$

ここで  $r$  が大きな値を持つとき、圧力は0となるため  $c_a=0$  を選択する。また質量保存則 (3-10) 式は左辺第3項は第1項、第2項と比べ小さいと考えられるので、次式で与えられる

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

$$v_r = \frac{c_c}{r} \quad c_c ; \text{定数} \quad (3-23)$$

また、 $r$  が  $r_0$  の近傍  $r_0 + \Delta r_0$  よりも大きい領域では円周方向に  $v_r^2 / v_\theta^2$  の値は一定とみなせるものとし、その値は、乱流境界層内の  $z$  軸方向に中心軸を持つ渦構造圧力が多く存在する外層領域の、 $x$  方向と  $y$  方向の乱れ速度の自乗平均  $\overline{u'^2}$  及び  $\overline{v'^2}$  に関係し、次式で与えられると近似する。

$$v_r^2 = k_b v_\theta^2 \quad , \quad k_b \equiv \frac{\overline{v'^2}}{\overline{u'^2}} \quad (3-24)$$

$k_b$  の値は図3-3のデータを参考にして選択し、本検討では簡単化して

$$k_b = \frac{1}{4} \quad (3-25)$$

を採用する。

(3-23) 式の定数  $c_b$  は  $r$  が十分大きい時の圧力  $\tilde{p}$  が0と扱えるため  $c_b=0$  とする。

これより (3-22) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}}{\rho} &= -\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_\theta^2}{2} \\ &= -\frac{k_b + 1}{2} \left( \frac{r_0}{r} v_0 \right)^2 \quad ; \quad r \geq r_0 \end{aligned} \quad (3-26)$$

となる。(3-26) 式と (3-20) 式が  $r=r_0$  で接続する

ために定数  $c_b = -v_0^2$  を採用する。

以上を纏めると次式で与えられる。

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = \begin{cases} -\left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right) v_0^2 & ; r < r_0 \\ -\frac{k_b + 1}{2} \left(\frac{r_0}{r} v_0\right)^2 & ; r > r_0 + \Delta r \\ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r - r_0}{\Delta r} k_0\right) \left(\frac{r_0}{r} v_0\right)^2 & ; r_0 \leq r \leq r_0 + \Delta r \end{cases} \quad (3-27)$$

これを図示すると図3-4のようになる。

図を得るに必要な定数  $k_b$ ,  $c_a$ ,  $c_b$  の選定の裏づけが更に十分できるよう今後検討を行う予定である。

## 4 横断渦と $u'v'$

### 4-1 横断渦と乱流境界層

2軸方向に中心軸を持つ渦構造圧力を単純化した横断渦の表現を以下用いることにする。乱流境界層の特長はこの横断渦が広く分布していることと定義されている。そして乱流の $x$ 、 $y$ 方向の速度の変動成分 $u'$ 、 $v'$ の積 $u'v'$ も乱流境界層の動力学研究においては重要な可視化表示の対象になっている。図4-1に $u'v'$ の代表等応力面（図中赤色形状物）と横断渦の等圧面（図中白色形状物）とが複雑な形状を有し、互いに関連して存在している。この両物体の形状、位置関係は、一連のDNS解析<sup>3), 7), 9)</sup>が行われるまで明確にされることがなかった3次元空間における乱流境界層内の圧力と乱流抵抗との力のバランス状態を可視化して説明していると解釈できる。

これまでの乱流抵抗の研究と、現象を可視化し定量的にどう結びついているのか説明している研究は少なく、その中では図4-1より明確なのは見当たらないと思われる。そこで、本研究では数式化の第1段階として次のことを行う。

- 1) 横断渦は中央部の円柱等圧面を対象とする。
- 2) 横断渦を構成する流れも、横断渦自体の成長、乱流中の移動、乱流からの回転エネルギーの吸収などにより不規則成分を多く有しており、横断渦の速度成分 $v'$ も $x$ 方向、 $y$ 方向の平均乱れ速度成分 $u'$ と同程度のスケールを有していると扱う。
- 3)  $u'v'$ の解析の仕方は、Robinson<sup>3)</sup>の方式に従い、図4-2に示すように主流方向に直交し水平方向に中心軸を持つ横断渦の断面を4分割し、その分割された各象限における乱れの応力は図に示されるように $u'v'_1$ 、 $u'v'_2$ 、 $u'v'_3$ 、 $u'v'_4$ に分類され、互いに異なる応力特性を有している。そのうちで、特に $u'v'_2$ は「湧き出し（ejection）」と名付けられ、図4-1に示されるように他と比べ大きな等応力領域を占めている。また、 $u'v'_4$ は「掃き出し（sweep）」と名付けられ、流れが渦の後方に巻き込まれながら応力が流出していく様子を示している<sup>3)</sup>。本研究では乱流応力をこの4分類に分ける方式に沿って検討する。
- 4) 本解析方法では、圧力方程式により一般解を級数の形で求め、横断渦の中央部にあたる円柱状の等圧面を示す渦構造圧力をその級数の第1項で求めているがその方式により求める横断渦のまわりの流速分布は図4-2の分布と若干異なっていた。この違いが図4-2の $u'v'$ の解析に影響を及ぼすのかを考察する。

### 4-2 $u'v'_2$ の領域計算

乱流境界層内の $x$ 方向の平均流速を $U$ とし、 $\partial U / \partial y > 0$ である剪断流の場合、 $v'$ が正の時は $u'$ が負になる確立が高く、逆に $v'$ が負の時は $u'$ が正になる確率が高い。

これは乱流中に存在する渦は自分より小さい渦にどんどんエネルギーを供給するため自分自身は平均流の剪断からエネルギーをもらって運動を維持しなければならないことを示している。

このことから、最大スケールの渦は他のどの渦よりも効率よく平均流からエネルギーを得る渦ということになる。渦のうち、 $u'$ と $v'$ が負の相関を保ちながら最も効率よくエネルギーを得るものは、平均流の歪みによって引っ張られる方向とはほぼ平行な回転軸を持つ渦であるとされ、その平均流から大きな渦へのエネルギー受け渡しのメカニズムは渦の伸張に関係しているとされている。渦の伸張とは、平均流の歪みで渦の回転軸が伸びて細長くなることであるが、この時、角運動量の保存から $u'$ と $v'$ の強い相関が維持されて、効率良く平均流からエネルギーを得ることができる<sup>11)</sup>。

そこで、 $u'v'$ が図4-1のような等応力面形状を有するのかを調べるため、まず、横断渦中央断面における周速 $v_\theta$ および $v_r$ を調べる。横断渦の周速の最大値を $v_0$ とし、 $v_0$ の速度を与える円周の半径を $r_0$ とすると、 $r_0$ より少し大きな $r$ の円周上の圧力は（3-22）式より、下式で表される。

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} = -\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) \quad ; r > r_0 \quad (4-1)$$

ここで前節と同じく $v_r$ 、 $v_\theta$ は次式で与えられる。

$$v_\theta^2 = \left( \frac{r_0}{r} v_0 \right)^2 \quad (4-2)$$

$$v_r^2 = k_b \left( \frac{r_0}{r} v_0 \right)^2 \quad (4-3)$$

$k_b$ は（3-20）式で与え、本計算では

$$k_b = \frac{1}{4} \quad (4-4)$$

を用いる。

（4-2）式、（4-3）式より横断渦中央断面における周速度 $v_\theta$ および半径方向速度 $v_r$ は図4-3のようになる。

横断渦の代表半径 $r_0$ の円の外側は周速度 $v_\theta$ の他に半径方向速度 $v_r$ が存在し、図4-2に示すように円軌道の最上点、最下点において $u'v' \cong 0$ の状態ではなくなっている。

図4-2で扱っている単純剪断流では、平均流にかかっている歪みの状態は $x$ 軸から45度の方向（直線 $x=y$ の方向）に伸張し、それと垂直な方向（直線 $x=-y$ の方向）に圧縮される歪みの状態に置き換えられる。平均流によって伸縮される方向（直線 $x=y$ の方向）にはほぼ平行な回転軸を持つ渦は、平均流の剪断から効率よくエネルギーを得られることが知られている<sup>11)</sup>。このことより図4-3の横断渦の外側の周方向及び半径方向の速度はベクトルとして分解され、前者は図4-2と同じ歪みとして働き、後者は

軸中心からの放射として働くと考えられ、 $u'v'$ だけを検討する上では省略できると考えられる。

本検討で、 $u'v'_2$ が $-45^\circ$ の方向から形成されていることの説明はできたが、既に図4-1において、 $u'v'$ が定量的に求まっているため、今後定量的な検証を行う必要がある。

## 5 階層構造とダイナミクス

### 5-1 乱流現象の階層構造と本解法

スーパーコンピュータを用いた大規模数値解析手法の導入により、図5-1の平均流速分布から図4-2の乱流現象の3次元可視化を伴う解析方式が確立してきている。

Kline<sup>9)</sup>はこれを流れのダイナミクスだけにとどまらず、あらゆる現象に共通する階層構造であり、各階層構造内のダイナミクスと階層間をまたぐダイナミクスを含め、数種の階層とダイナミクスにより自然現象が説明されることを導いている。本研究では漸近的な解法を用いて流動現象を数式で解いており、この際、階層及びダイナミクスはどのような数式表現に相当しているのか、なぜ解析上必要となるのか、及び圧力の不安定性、不規則性につき具体的に式で表示することを試みる。

本解析法は次式の方程式を用いている。ここで、運動量保存則およびポアソン方程式は既にそれぞれ(2-1)式、(2-2)式で与えているが、説明の都合上新たに式番をつけている。

$$\text{質量保存則； } \nabla' \tilde{u} = 0 \quad (5-1)$$

運動量保存則；

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \tilde{u} \quad (5-2)$$

ポアソン方程式；

$$\nabla^2 \tilde{p} = \tilde{g}, \quad \tilde{g} = \nabla' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{u} \quad (5-3)$$

圧力に関するポアソン方程式は運動量保存則を偏微分して得られた運動量保存則とは独立した流動現象を呈示していると考えられる。そこで(5-2)式と(5-3)式を1) 解の特長、2) 渦構造圧力の表示方法、3) 渦構造圧力のダイナミクスにつき、以下検討を行う。

#### 1) 解の特長

##### (1) 運動量保存則

非線形方程式である運動量保存則(5-2)式 of 非線形方程式は右辺に線形項、左辺に非線形項及び圧力項を用いた次式

$$\left( \nabla^2 + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{u} = \frac{1}{\rho \nu} \nabla \tilde{p} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{u} \quad (5-4)$$

で与える。この数式解法として本解析では右辺を外力項と

して先ず与え、線形偏微分方程式を解き、その解と、(5-3)式の圧力項とを加えて新しい外力項として、再度(5-4)式を解くことにより漸近的に $\tilde{u}$ 求める方式を採用している。この(5-4)式の右辺で与えられる外力を以下 $\tilde{f}$ で与えることにする。

この線形とみなす方程式を簡単化し、 $z$ 方向周期界条件の下でラプラス-フーリエ変換により求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z, t) &= \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^\infty \int_0^t f(\xi, \eta, \varsigma, \tau) R_\alpha(x - \xi, y, \eta, z - \varsigma, t - \tau) \\ &\quad \times d\tau d\xi d\eta d\varsigma + \frac{z}{b} \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^t f(\xi, \eta, \varsigma, \tau) \\ &\quad \times R_\beta(x - \xi, y, \eta, z - \varsigma, t - \tau) d\tau d\xi d\eta d\varsigma \quad (5-5) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} R_\alpha(x, y, \eta, z, t) &= \frac{\chi(x, t)}{2} \frac{\chi(y + \eta, t) - \chi(y - \eta, t)}{2} \\ R_\beta(x, y, \eta, z, t) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{2k\pi}{b} z} \chi(x - \xi, t - \tau) \\ &\quad \times \frac{\chi(y + \eta, t) - \chi(y - \eta, t)}{2} \cos \frac{2k\pi}{b} (z - \varsigma) \\ \chi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

#### (2) ポアソン方程式

圧力に関するポアソン方程式(5-3)式を、 $z$ 方向に周期境界条件を入れて、簡単化してラプラス-フーリエ変換で解くと圧力は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y, z) &= \frac{1}{2b} \iiint d\phi d\xi d\varsigma \{ \tilde{g}(\xi - \phi, y + i\phi, \varsigma) + \tilde{g}(\xi - \phi, y - i\phi, \varsigma) \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi b} \iiint \tilde{g}(\xi, \eta, \varsigma) \left\{ K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - K_0 \left( \beta_k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \right\} \cos \beta_k (z - \varsigma) d\xi d\eta d\varsigma \quad (5-7) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2k\pi}{b} \\ K_0(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \sqrt{t^2 - 1} dt \end{aligned}$$

(5-5)式と(5-7)式の比較を行うため、(5-5)

式を求める逆変換の過程を図5-1に与える。図より次のことが分かる。

(1) 流れを求める過程は圧力を求める過程より積分過程が一段階多いため、圧力を求める積分が $\delta$ 関数に似た第2種変形ベッセル関数であるのに対し、流れの方の積分過程の核関数はガウス分布関数に似た $\delta$ 関数で与えられる。これにより、流れは圧力の変動を滑らかにする傾向があると考えられる。

## 2) 渦構造圧力の表示方法

Spalart<sup>7)</sup> (1988) の研究で与えられている乱流境界層内の平均速度分布データより、境界層内の各種速度分布を、剪断流速  $u_\tau (=0.0517m/s)$  で無次元化すると、図5-2の分布になる。これら各種速度分布を用いて、ポアソン方程式の外力 $\tilde{g}$ を求める。 $\tilde{g}$ は $z$ 方向に中心軸を持つ多数の渦構造圧力 $\tilde{p}_{1j}$ に対応する外力 $\tilde{g}_1$ と、 $x$ 向の中心軸を持つ多数の渦構造圧力 $\tilde{p}_{2k}$ に対応する外力 $\tilde{g}_2$ から成っている。 $\tilde{g}$ の曲線は $y$ 方向に2つのピークを持っており、小さい $y$ の領域で現れるピークは $\tilde{g}_2$ のピークを示し、大きい $y$ の領域でのピークは $\tilde{g}_1$ のピークを示している。DNS解析<sup>3)</sup>の結果を参考に

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \quad (5-8)$$

となるよう分配すると、図5-3のように与えることができる。

$z$ 方向に中心軸を持つ渦構造圧力 $\tilde{p}_{1j}$ の分布は(3-23)式で与えられ、この1つの渦構造圧力に対応する外力を $\tilde{g}_{1j}$ とすると、次の関係式が得られる。

$$\tilde{g}_{1j} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{p}_{1j} ; j=1,2,\dots,N_1 \quad (5-9)$$

$$\tilde{g}_1 = \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{g}_{1j} \quad (5-10)$$

(5-9)式より求まる $\tilde{g}_{1j}$ の形状は2次元ガウス分布とは若干異なった形状を有している。そこで今回はDNS解析結果を参考にしている。DNS解析で得られている渦径と中心軸高さを示す数値実験データはある領域をほぼ一様に分散している。そこで本検討では単純化して、まず渦が存在する中心軸の高さを数10個定め、各中心の軸の高さに依存する渦径の異なる数個（；ここでは7個を選択）の渦に対し、数個の渦に対応する数個の外力の和が $y-\tilde{g}$ 座標内でガウス分布になるよう、これら外力に対応する渦構造圧力の径を調整している。これにより、 $\tilde{g}_1$ のグラフから数10個の中心軸の高さに対応するガウス分布外力が定まり、それらガウス分布からそれぞれ数個の渦に相当する渦構造圧力の分布が求まる。参考としたDNS解析結果と合わせ図5-4に与える。このような連続の式から離散的に物理量

を取り出す方法は良く知られていないが、今後種々の方式で試み、信頼性の高いデータを得る必要がある。

## 3) 渦構造圧力のダイナミクス

渦構造圧力のダイナミクスとして次の事柄があげられる。

- 低速渦状逆流領域（；*a low-speed streak*）に跨った壁近傍の渦構造が形成される。
- 渦構造圧力が成長し、円弧渦あるいは馬蹄渦が形成され、次の新しい円弧渦が形成される。
- 円弧渦あるいは馬蹄渦が発達し、横断渦として横方向に更に発達する。

これらに関して、本解析で明確にすることが出来ない部分は上記ダイナミクスの説明に必要な、渦構造圧力の形状データ（代表直径、中心軸長さ等）と、位置データ（中心軸位置、高さ、方向等）、および、渦の成長を示すデータである。これらは、主に連続したデータというより離散的データと見なすことができる。今後これらのデータを取得する上で重要と思われる次の項目につき検討を行なう。

### (1) 渦構造圧力と弱周期境界条件

低速渦状逆流領域は、ゆるやかに太くなる半円錐形状であり、それをまたぎながら渦構造圧力は流され成長していく。すなわち、弱周期境界条件は上記逆流領域上面の領域平均傾斜を反映しているとも考えられる。

今後、この条件の選定は重要になると考えられる。

### (2) 横断渦の成長

横断渦は周期境界条件だけから求まり、弱周期境界条件のように成長過程の情報は、中心軸の長さと言われている。しかし、横断渦の中心軸が両側面に到達したときに横断渦の成長最終段階とは考えにくい。今後バースト現象も含め検討されることを期待する。

## 6 まとめ

Doetsch & Voelker (1950)<sup>5)</sup> の「2次元Laplace変換と境界値問題への応用」が圧力に関するポアソン方程式および運動量保存則の非線形項と圧力項を外力項として得られる3次元線形偏微分方程式の解析解を得るのに非常に有効であることが分かり、この解析技術を利用して、流体の支配方程式を求めることを検証した。すなわち、まず、適切な外力項を与え、線形偏微分方程式の解を求め、次にその解から外力項を求め、以下逐次解析解を求め、漸近的に非線形を含む流体方程式を解析的に解く方式である。本論文ではその第1段階の解と次に移る収束解を得るための方式の揭示までであるが、次のことが明らかになったと考える。

1) 流体の3次元運動量保存則も圧力の3次元ポアソン方程式も周期境界条件を導入すると有意な解が得られる。ただし、入口高さと出口高さが若干異なった領域を周期的に扱う弱周期境界条件が安定で、且つ実流体現象をシミュ



レイトする上では実現象を再現する上で有効と考えられる。

2) 関数解析による線形偏微分方程式の解法において、流れを求める場合の核関数がガウス分布関数に似た関数となるのに比べ、圧力の場合はデルタ関数に似たベッセル関数となり、これまでDNS解析により渦構造圧力のダイナミクスとして求められた複雑な等圧面の可視化形状とその変化を説明するのに役立つと考えられる。

3) 渦構造圧力等圧面の形状とダイナミクスを、動いている形状で扱う上で、動座標系表示を適用して行なった。静座標系と動座標系が、それぞれ直交座標系と円柱座標系とであるため、系の変換が難しいが、2つの座標系を同時に扱うことがダイナミクスを理解する上で今後重要になると考える。

## 7 本研究の今後の課題

本解析を行う上で対応が難しく、満足に解明できなかった問題を、残された課題としてまとめると下記3項目となる。

(1) 座標系の問題；動座標系に適した円柱座標系と、静座標系に適した直交座標系の両方を、流れのダイナミクスでは同時に扱う必要がある。

(2) 入口境界条件；本解析ではラプラス変換とフーリエ変換のいずれかを用いて解いている。後者は解が良く知られているが、入口境界条件が設定しづらく、そのため確率事象としての解に近くなると考えられる。一方、前者は精度の高い入口の一定時間に亘る乱流計測データが必要になり、取得が非常に難しい。解析精度向上の上で今後の課題である。

(3) アナログ解とディスクリート解；渦構造圧力の個数、代表半径、中心位置等のディスクリート・データが既に数値解析では、弱周期境界条件と関連して求められてきている。しかし、このようなアナログ解からディスクリート解への移行時のトリガー・レベルを説明する必要がある。これは既に階層構造とダイナミクスの研究でされているのかも知れないが、定量的な問題として残されている。

## 8. 参考文献

- 1) 田中厚成、成 英恵、曾根良太；乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第1報）（初期渦構造圧力および初期乱れ速度分布の解析解）千葉科学大学紀要、第3号、（2010. 3）
- 2) 田中厚成、岡本 恒、山木さやか；乱流境界層内渦構造圧力の解析解について（第2報）（初期乱れ圧力および速度解析の信頼性向上）千葉科学大学紀要、第4号、（2011. 3）
- 3) S.K.Robinson;The Kinematics of Turbulent Bound-ary

Layer Structures, NASA TM103859, (1991.4)

- 4) 田中厚成；ナビエ・ストークス方程式直接シミュレーションの積分解法について、防衛庁技術本部技報、第6632号、（1997. 2）
- 5) デッチュ、フェルカ；2次元ラプラス変換の理論と応用、法政大学出版局（1968）
- 6) S.K.Robinson；A Review of Vortex Structures and Associated Coherent Motions in Turbulent Boundary Layer, Second IUTAM Symposium on Structure of Turbulence and Drag Reduction, (1989.7)
- 7) P.R.Sparlart；Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer Up to  $Re = 1410$ , J of Fluid Mech. Vol.187, (1988)
- 8) J.Mulis, H.M.Tsai, P.Bradshaw；The Structure of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers, J of Fluid Mech., Vol.122, (1982)
- 9) S.J.Kline；Research, Invention, Innovation and Production Model and Reality, Report INN-ID, Stanford Univ, (1985.2)
- 10) F.M.White；Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill (1974)
- 11) H.Tennekes, J.L.Lumley；A First Course in Turbulence, MIT Press (1972)
- 12) 吉田耕作、雨宮綾夫穂ほか；応用数学便覧、丸善（1975）



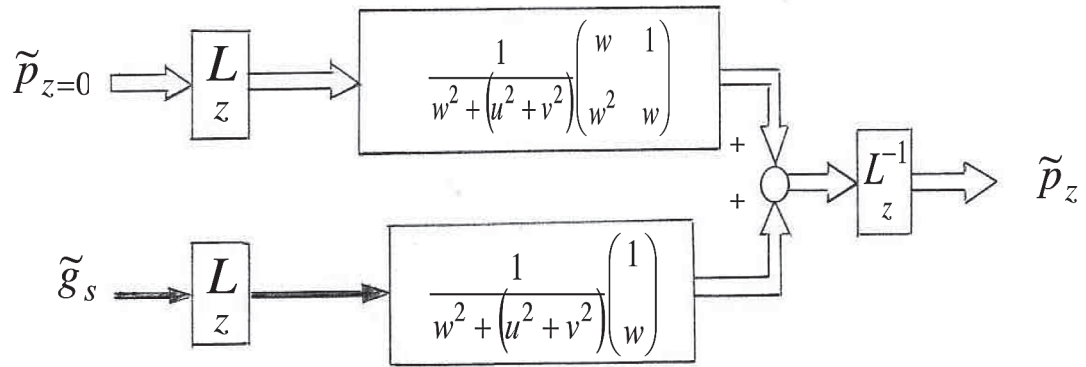


図 2 - 1. (2 - 3) 式のブロック線

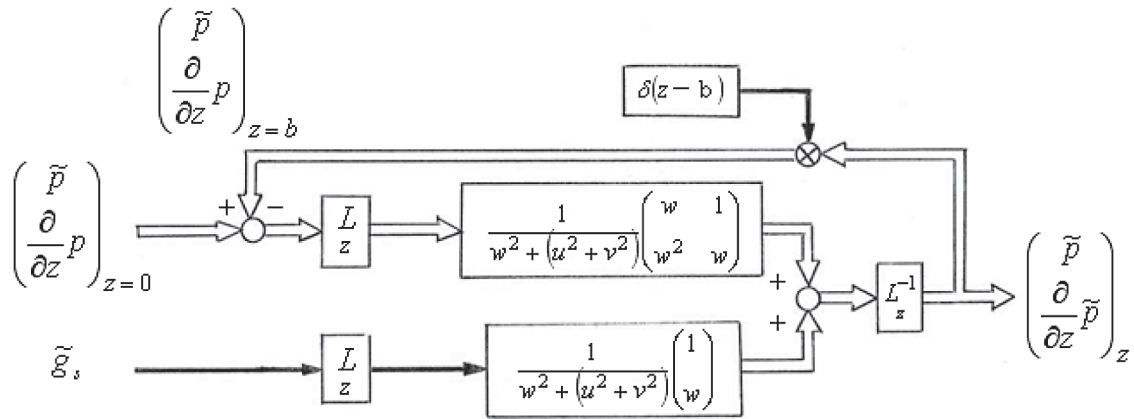


図 2 - 2 後端圧力の負帰還を用いた解析

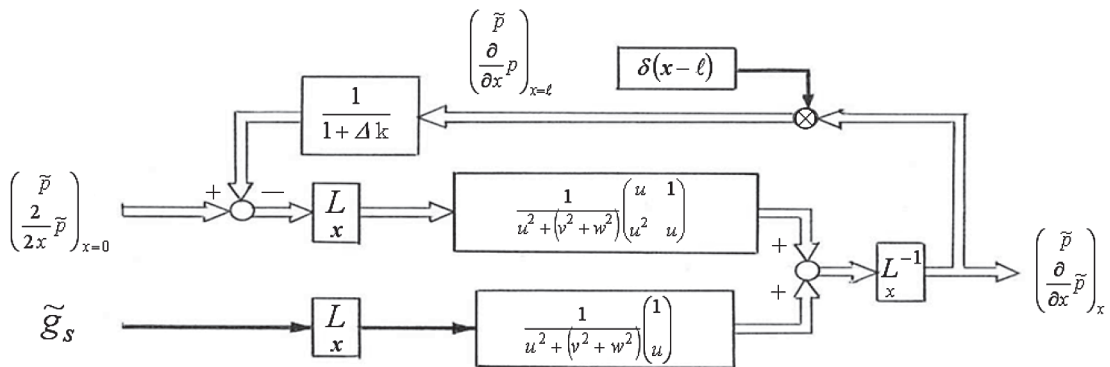


図 2 - 3 後端圧力の弱負帰還を用いた解析

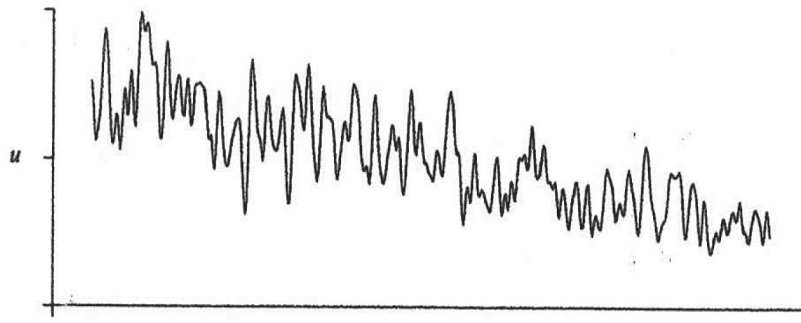


図2-4 乱れ信号の減衰 (from spalart,1988)

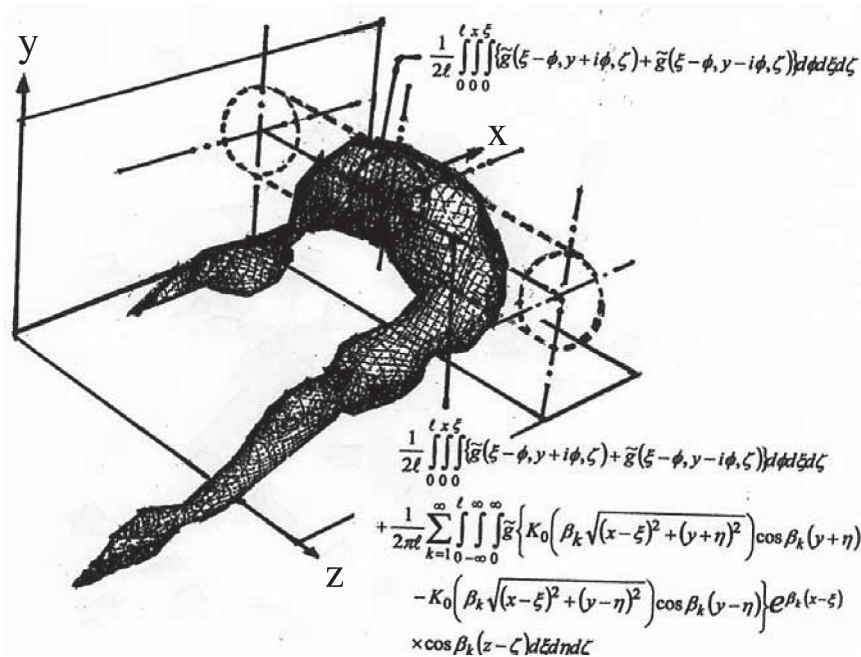


図3-1 渦構造圧力の等圧面形状に対応する数式例

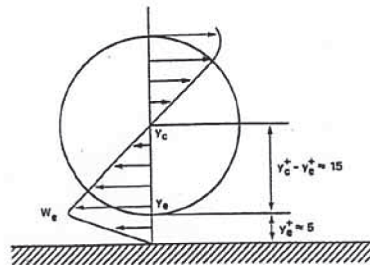


図3-2 壁面上の流線の高い渦度により引き起こされる壁近傍流線渦の概要図  
(Kim, Moin, Moser(1987) より)

(  $y_c - y_e$  渦半径の無次元量,  $w_e$ ; 最大流速,  $(+)$  は無次元量 )

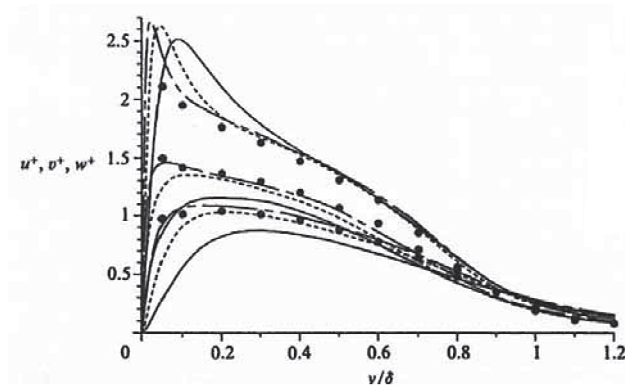


図3-3 乱れ強さ・上側曲線,  $u_{rms}/u_\tau$ ;下側曲線,  $v_{rms}/u_\tau$ ;中間曲線,  $w_{rms}/u_\tau$ .  
—,  $R_\theta=300$ ;---,  $R_\theta=670$ ;— · —,  $R_\theta=670$ ;——,  $R_\theta=1410$ , •,  $R_\theta \approx 7500$ (klebanoft 1954),(Spalart (1988)より)

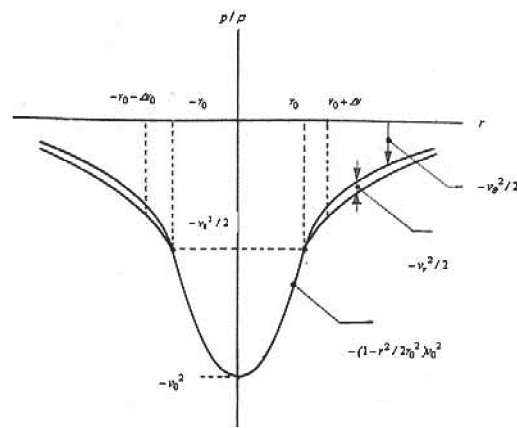


図3-4 z軸方向に中心軸を持つ渦構造圧力の半径方向圧力分布

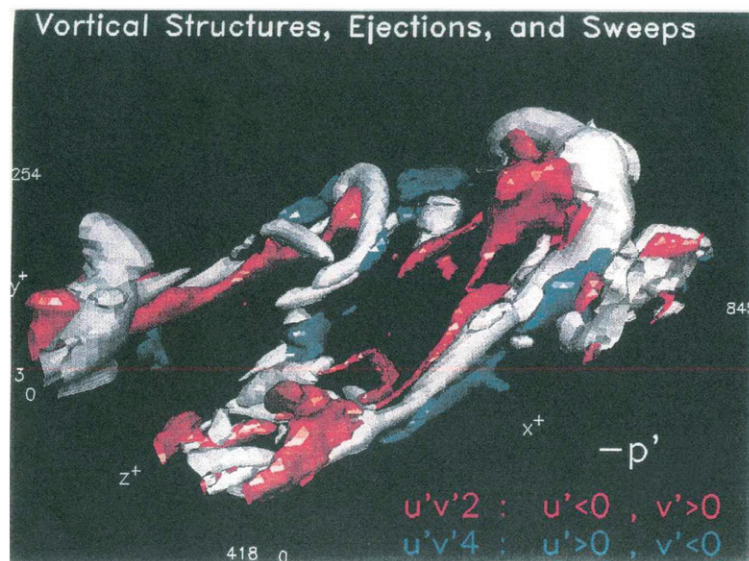


図4-1 渦構造の低圧域, 湧き出し域, 掃き出し域の3D表示 (Robinson (1991) より)

白:低圧  $p'^+ = -4.2$ , 赤:湧き出し  $(u'v')_2/u_\tau^2 = -4.2$ , 青:掃き出し  $(u'v')_4/u_\tau^2 = -4.2$

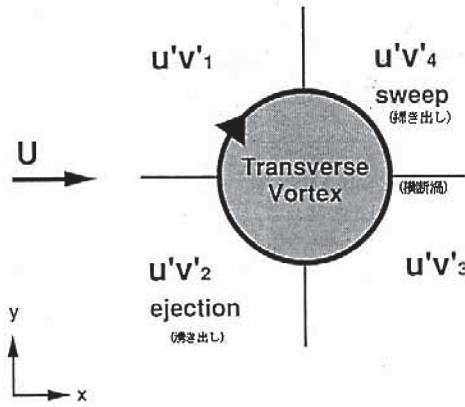


図4-2 x-y 平面上の横断渦周りの力  
(Robinson (1991) より)

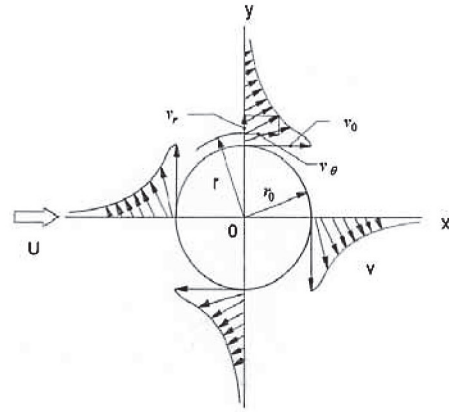


図4-3 渦構造圧力外周の速度分布

$$\begin{array}{c}
 \frac{F}{v^2 - (S + w^2 + \beta^2)} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \boxed{F^{-1} \mathcal{L}^{-1}} \quad \quad \quad \boxed{\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-1}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ K_0 \left( \sqrt{(s + \beta^2) g_\alpha} \right) - K_0 \left( \sqrt{(s + \beta^2) g_\beta} \right) \right\} f(\xi, \eta, s) d\xi d\eta \\
 \text{where } g_\alpha \equiv (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 \\
 g_\beta \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \\
 \text{referring to} \quad \mathcal{L}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-y\sqrt{s}} \\
 \chi(y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ e^{-\sqrt{(s + \beta^2) g_\alpha \zeta}} - e^{-\sqrt{(s + \beta^2) g_\beta \zeta}} \right\} f(\xi, \eta, s) d\xi d\eta d\zeta \\
 \int_0^t \int_0^{\infty} e^{-(\omega^2 + \beta^2)(t - \tau)} \frac{\chi(y + \eta, t - \tau) - \chi(y - \eta, t - \tau)}{2} f(i\omega, \eta, \tau) d\eta d\tau \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \boxed{\mathcal{L}^{-1}} \quad \quad \quad \boxed{F^{-1}} \\
 \text{referring to} \quad \mathcal{L}^{-1} \left( e^{-a\sqrt{s + \beta^2}} \right) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t - 3/2}} e^{-\left( \beta^2 t + \frac{a^2}{4t} \right)} \\
 \text{referring to} \quad \mathcal{F} \left( \frac{1}{2} \chi(x, \lambda) \right) = e^{-\lambda \omega^2} \\
 \int_0^{\infty} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\beta^2(t - \tau)} \chi(x - \xi, t - \tau) \frac{\chi(y + \eta, t - \tau) - \chi(y - \eta, t - \tau)}{2} f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau
 \end{array}$$

図5-1 関数解析により求める流速



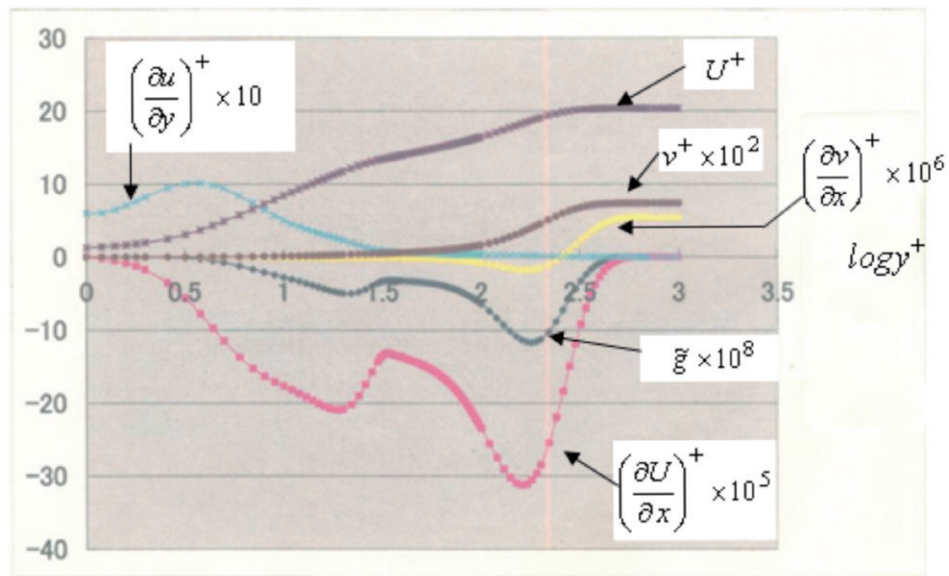


図5-2 境界層内各種無次元速度分布

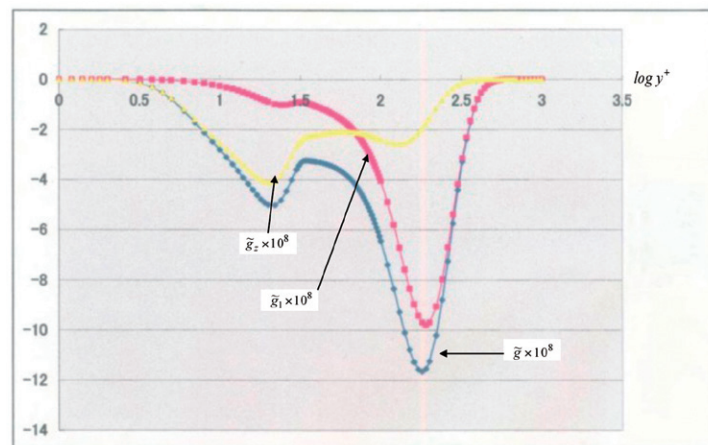


図5-3、x方向とZ方向の渦構造圧力の外力

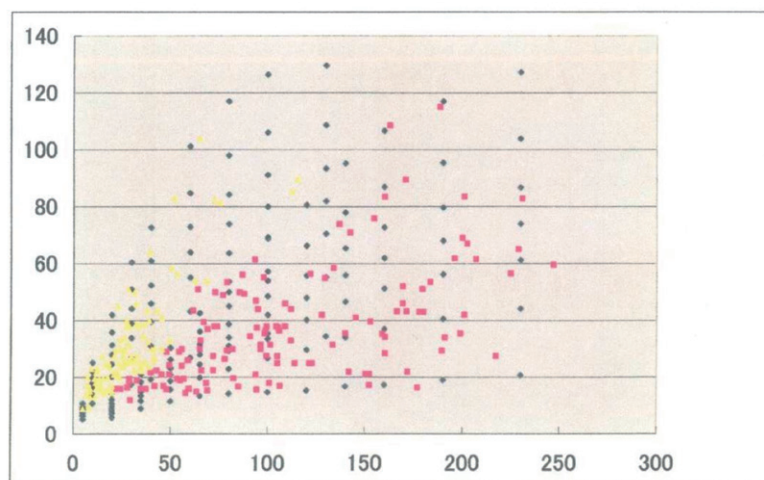


図5-4 渦中心高さと渦直径

赤印；横断渦，黄色印；前後方向渦（Robinson（1991）より）  
青印；横断渦と前後方向渦（本解析で設定）